

1. Számítsa ki a következő mátrixok karakterisztikus polinomját és minimálpolinomját:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{D} = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -4 & -1 & 0 \\ 4 & -8 & -2 \end{bmatrix} \quad \mathbf{H} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}$$

2. Keressünk olyan mátrixokat, amelyek karakterisztikus polinomja
- a) $\lambda^2 - 3\lambda + 7$;
 - b) $-\lambda^3 + \lambda$;
 - c) $\lambda^4 - 4\lambda^3 + 6\lambda^2 - 4\lambda + 1$.
3. Mi a kapcsolat $\mathbf{M}$ és $\mathbf{M}^{-1}$ sajátvektorai, ill. sajátértékei között?
4. Mit állíthatunk a $\mathbf{T}$ mátrix valós sajátértékeiről, ha
- a) $\mathbf{T}^4 = \mathbf{0}$;
 - b) $\mathbf{T}^5 = \mathbf{I}_n$;
 - c) $\mathbf{T}^6 = \mathbf{I}_n$?
5. Tegyük föl, hogy az $\mathbf{A}$ diagonalizálható mátrix karakterisztikus polinomja $(3 - \lambda)^n$. Mi lehet az $\mathbf{A}$ mátrix?
6. Bizonyítsa be, hogy ha egy mátrix négyzete az egységmátrix, akkor diagonalizálható.
7. Teljesülnek-e a skalárszorzat axiómái, ha az $\mathbf{x} = [x_1, x_2]^\top$ és $\mathbf{y} = [y_1, y_2]^\top$ $\mathbb{R}^2$ -beli vektorokra a következőképpen értelmezzük?
- a) $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = x_1x_2 + y_1y_2$;
 - b) $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 2x_1y_1 + 3x_2y_2$;
 - c) $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = x_1y_2 + x_2y_1$;
 - d) $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 2x_1y_1 + x_1y_2 + x_2y_1 + x_2y_2$.
8. Vegyük $\mathbb{C}^3$ -ban az $\mathbf{a} = [1 - i, 1, i]^\top$, $\mathbf{b} = [1 - i, i, 2]^\top$ vektorokat. Számítsuk ki az $(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \mathbf{a}^* \mathbf{b}$ skalárszorzatot és az $\mathbf{a}$ vektor normáját!
9. Határozzuk meg a $\mathbf{c} = [3, y, z]^\top$ vektor ismeretlen koordinátáit úgy, hogy merőleges legyen az előző feladatbeli $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ vektorokra!
10. Legyenek $\mathbf{x}$ és $\mathbf{y}$ egy komplex euklideszi tér vektorai. Mutassuk meg, hogy ha $\mathbf{x} - i\mathbf{y}$ és $i\mathbf{x} + \mathbf{y}$ merőlegesek egymásra, akkor $\mathbf{x}$ és $\mathbf{y}$ lineárisan összefüggők.
11. Számítsa ki az $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ vektorok szögét $\mathbb{R}^4$ -ben $[(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \mathbf{a}^\top \mathbf{b}]$:
- a) $\mathbf{a} = [1, 2, 2, 3]^\top$, $\mathbf{b} = [3, 1, 5, 1]^\top$;
 - b) $\mathbf{a} = [1, 1, 1, 1]^\top$, $\mathbf{b} = [1, 0, 0, 0]^\top$.
12. Keressen olyan egységvektort, amely merőleges a $[2, 1, 1, 3]^\top$, $[1, 1, 1, 1]^\top$ és $[1, -1, -1, 1]^\top$ vektorok mindegyikére!

13. Igazolja, hogy minden euklideszi térben teljesül az

$$\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\|^2 + \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|^2 = 2(\|\mathbf{x}\|^2 + \|\mathbf{y}\|^2)$$

összefüggés.

14. Legyen $\mathbf{a}$ egy V euklideszi tér vektora. Mutassa meg, hogy $\{\mathbf{v} \in V \mid (\mathbf{v}, \mathbf{a}) = 0\}$ altér.

15. Legyen $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n$ egy euklideszi tér ortonormált bázisa. Igazoljuk a következőket

$$\mathbf{x} = \sum_{j=1}^n (\mathbf{e}_j, \mathbf{x}) \mathbf{e}_j, \quad (\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sum_{j=1}^n (\mathbf{x}, \mathbf{e}_j)(\mathbf{e}_j, \mathbf{y}), \quad \|\mathbf{x}\|^2 = \sum_{j=1}^n |(\mathbf{e}_j, \mathbf{x})|^2,$$

ahol $\mathbf{x}$ és $\mathbf{y}$ a tér tetszőleges vektorai.

16. Alkalmazzuk a Schmidt-féle ortogonalizációs eljárást a $\mathbf{b}_1 = [1, 1, 1, 1]^\top$, $\mathbf{b}_2 = [0, 1, 1, 1]^\top$, $\mathbf{b}_3 = [0, 0, 1, 1]^\top$, $\mathbf{b}_4 = [0, 0, 0, 1]^\top$ vektorokra!

17. Legyen $\mathbf{A}$ az alábbi lineáris egyenletrendszer együtthatómátrixa. Számítsa ki $\mathbf{A}$ egy általánosított inverzét, és ennek segítségével az egyenletrendszer (euklideszi normában) legjobban közelítő megoldását!

$$x + y = 6$$

$$2x + y = 0$$

$$3x + y = 0$$