

1. Legyen $\underline{e}_1, \underline{e}_2$ bázis $\mathbb{R}^2$ -ben, $\varphi \in \text{Hom}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$, $[\varphi]^{\underline{e}} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 5 & -3 \end{bmatrix}$. Írja fel a $[\varphi]^{\underline{e}'}$ mátrixot, ha $\underline{e}'_1 = -3\underline{e}_1 + 7\underline{e}_2$, $\underline{e}'_2 = \underline{e}_1 - 2\underline{e}_2$. (Bázis lesz-e valóban $\underline{e}'_1, \underline{e}'_2$?)
2. Legyen ξ_1 a síknak az x tengelyre, η_1 pedig az y tengelyre való tükrözése, továbbá ξ_2 , illetve η_2 ugyanezekre a tengelyekre való merőleges vetítések. Számítsa ki a $\xi_1 + \eta_1$ és a $\xi_2 + \eta_2$ összegeket!
3. Írja fel a mátrixát az $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ bázisban az x tengely és az y tengely körüli 90° -os forgatásnak. Mi a két transzformáció szorzata? (Számítsa ki a két mátrix szorzatát!)
4. Az alábbi mátrixok egy-egy lineáris transzformáció mátrixai az $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ bázisban. Adja meg ugyanezeknek a lineáris transzformációknak a mátrixát az $\mathbf{i}, \mathbf{i} + \mathbf{j}, \mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}$ bázisban!

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

5. Számítsa ki a következő mátrixok sajátértékeit és sajátvektorait:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{D} = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -4 & -1 & 0 \\ 4 & -8 & -2 \end{bmatrix} \quad \mathbf{H} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}$$

6. Legyen V vektortér $\mathbb{C}$ ill. $\mathbb{R}$ felett; $\underline{e}_1, \underline{e}_2$ bázis V -ben; $\varphi \in \text{Hom}(V, V)$. Melyek a φ sajátértékei, sajátvektorai, van-e SB, ha $[\varphi]^{\underline{e}}$

$$\text{a) } \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{b) } \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{c) } \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{d) } \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} ?$$

A felsorolt mátrixok diagonalizálhatók-e $\mathbb{C}$ felett ill. $\mathbb{R}$ felett?