

Zárthelyi dolgozat
2007. november 6.
A csoport

Pontozás. Az 1. feladatnál a válaszokat nem kell indokolni, minden helyes válaszra 2, minden hibás válaszra -2 , minden megválaszolatlan kérdésre 0 pont jár. A további (2.-7.) feladatoknál a megoldásokat indokolni kell, a végeredmény pusztán közlése gyakorlatilag értéktelen. Minden feladat teljes megoldása 10 pontot ér. **Érdemjegy.** A megszerzett pontok számának tizede, így nemcsak egész (és nemcsak pozitív) jegyeket lehet szerezni.

1. Döntsük el, hogy **(I)**gazak vagy **(H)**amisak a következő állítások.
 - (a) Van olyan vektortér, melyben 7 és 9 elemű bázis is van.
 - (b) Van olyan bázis, ami összefüggő.
 - (c) Ha egy vektorrendszer lineárisan összefüggő, akkor tetszőleges vektora felírható a többi vektorának lineáris kombinációjaként.
 - (d) Minden vektortér összes alterének metszete a $\{0\}$ altér.
 - (e) Ha az $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ térvektorokra az $\mathbf{ab}$ skaláris szorzat pozitív, és a $\mathbf{bc}$ skaláris szorzat pozitív, akkor az $\mathbf{ac}$ skaláris szorzat is pozitív.
2. Oldjuk meg az alábbi lineáris egyenletrendszert. (Használható: Gauss-elimináció, elemi bázistranszformáció.)

$$x + 2y + 3z = 11$$

$$5x + 7y + 11z = 45$$

$$13x + 17y + 19z = 105.$$

3. Mely nemelfajuló négyszögekre igaz, hogy a súlypont éppen az átlók metszéspontja? (A nemelfajulón most azt értjük, hogy a négy csúcstól semelyik három nem esik egy egyenesbe.)
4. Az $\mathbb{R}^5$ vektortérben tekintsük a következő halmazt:

$$U = \left\{ \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} : x_1^2 + x_2^2 = 0, 3x_3 = 4x_4 \right\}.$$

Bizonyítsuk be, hogy U altér $\mathbb{R}^5$ -ben, és adjunk meg benne bázist.

5. Az $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ függvények vektorterében lineárisan független vagy összefüggő a következő rendszer: $x, x^2, \sin x, \cos x$?
6. Az $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ vektorok lineárisan függetlenek. Bizonyítsuk be, hogy ha az $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2$ valós számokra $\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1 \neq 0$, akkor az $\alpha_1\mathbf{a} + \beta_1\mathbf{b}, \alpha_2\mathbf{a} + \beta_2\mathbf{b}$ vektorok is lineárisan függetlenek.
7. Legyen adott a V vektortér, és az X, Y, Z alterek úgy, hogy $X \supseteq Z$. Bizonyítsuk be, hogy

$$X \cap (\langle Y, Z \rangle) = \langle (X \cap Y), Z \rangle.$$

Zárthelyi dolgozat
2007. november 6.
B csoport

Pontozás. Az 1. feladatnál a válaszokat nem kell indokolni, minden helyes válaszra 2, minden hibás válaszra -2 , minden megválaszolatlan kérdésre 0 pont jár. A további (2.-7.) feladatoknál a megoldásokat indokolni kell, a végeredmény pusztán közlése gyakorlatilag értéktelen. Minden feladat teljes megoldása 10 pontot ér. **Érdemjegy.** A megszerzett pontok számának tizede, így nemcsak egész jegyeket lehet szerezni.

1. Döntsük el, hogy **(I)**gazak vagy **(H)**amisak a következő állítások.
 - (a) Ha egy vektortérben van 4 elemű bázis, akkor nincs benne 5 elemű bázis.
 - (b) Minden bázis lineárisan független.
 - (c) Ha egy vektorrendszer lineárisan összefüggő, akkor tetszőleges vektora felírható a többi vektorának lineáris kombinációjaként.
 - (d) Minden vektortér összes alterének uniója a vektortér.
 - (e) Ha az **a, b, c** térvektorokra az **ab** skaláris szorzat pozitív, és a **bc** skaláris szorzat pozitív, akkor az **ac** skaláris szorzat is pozitív.
2. Oldjuk meg az alábbi lineáris egyenletrendszert. (Használható: Gauss-elimináció, elemi bázistranszformáció.)

$$2x + y + 3z = 6$$

$$7x + 5y + 11z = 20$$

$$17x + 13y + 19z = 40.$$

3. Legyenek adottak az **a, b** térvektorok, melyekre $\mathbf{a} \times \mathbf{b} \neq \mathbf{0}$. Bizonyítsuk be, hogy **a, b, a × b** bázis a térben.
4. Az $\mathbb{R}^5$ vektortérben tekintsük a következő halmazt:

$$U = \left\{ \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} : x_2 \geq 0, x_2^3 + x_3^4 = 0, 4x_4 = 5x_5 \right\}.$$

Bizonyítsuk be, hogy U altér $\mathbb{R}^5$ -ben, és adjunk meg benne bázist.

5. Vannak-e az $\mathbb{R}^3$ vektortérben olyan kétdimenziós U, V alterek, melyekre $U \cup V = \mathbb{R}^3$?
6. Az **a, b** vektorok lineárisan függetlenek. Bizonyítsuk be, hogy ha az $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2$ valós számokra $\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1 \neq 0$, akkor az $\alpha_1\mathbf{a} + \beta_1\mathbf{b}, \alpha_2\mathbf{a} + \beta_2\mathbf{b}$ vektorok is lineárisan függetlenek.
7. Legyen adott a V vektortér, és az X, Y, Z alterek úgy, hogy $X \supseteq Z$. Bizonyítsuk be, hogy

$$X \cap \langle Y, Z \rangle = \langle (X \cap Y), Z \rangle.$$

Zárthelyi dolgozat
2007. november 6.
C csoport

Pontozás. Az 1. feladatnál a válaszokat nem kell indokolni, minden helyes válaszra 2, minden hibás válaszra -2 , minden megválaszolatlan kérdésre 0 pont jár. A további (2.-7.) feladatoknál a megoldásokat indokolni kell, a végeredmény pusztá közlése gyakorlatilag értéktelen. Minden feladat teljes megoldása 10 pontot ér. **Érdemjegy.** A megszerzett pontok számának tizede, így nemcsak egész jegyeket lehet szerezni.

1. Döntsük el, hogy **(I)**gazak vagy **(H)**amisak a következő állítások.
 - (a) Van olyan vektortér, melyben 11 és 12 elemű bázis is van.
 - (b) Ha egy **a** térvektornak minden térvektorral vett skaláris szorzata 0, akkor **a** = **0**.
 - (c) Ha egy vektorrendszer lineárisan összefüggő, akkor tetszőleges vektora felírható a többi vektorának lineáris kombinációjaként.
 - (d) Van olyan vektorrendszer, ami egy adott bázisban lineárisan független, egy másikban pedig összefüggő.
 - (e) Ha az **a, b, c** térvektorokra az **ab** skaláris szorzat pozitív, és a **bc** skaláris szorzat pozitív, akkor az **ac** skaláris szorzat is pozitív.
2. Oldjuk meg az alábbi lineáris egyenletrendszert. (Használható: Gauss-elimináció, elemi bázistranszformáció.)

$$3x + 2y + z = 5$$

$$11x + 7y + 5z = 16$$

$$19x + 17y + 13z = 8.$$

3. Legyen adott a síkban az ABC háromszög. Az AB oldal A -hoz közelebbi harmadolópontja legyen C' , a BC oldal B -hez közelebbi harmadolópontja legyen A' , és a CA oldal C -hez közelebbi harmadolópontja legyen B' . Bizonyítsuk be, hogy az $A'B'C'$ háromszög súlypontja ugyanaz, mint az ABC háromszögé.
4. Az $\mathbb{R}^5$ vektortérben tekintsük a következő halmazt:

$$U = \left\{ \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} : x_1 \geq 0, x_1 + 2x_2^2 + 4x_4^4 = 0 \right\}.$$

Bizonyítsuk be, hogy U altér $\mathbb{R}^5$ -ben, és adjunk meg benne bázist.

5. Legyenek adottak az n_1, n_2, n pozitív egész számok, melyekre $n_1 + n_2 \leq n$. Bizonyítsuk be, hogy ha az $\mathbb{R}^n$ vektortérben adott egy n_1 dimenziós U és egy n_2 dimenziós V altér, akkor van olyan W altér is, mely $n - (n_1 + n_2)$ dimenziós, és $U \cap W = V \cap W = \{\mathbf{0}\}$.
6. Az **a, b** vektorok lineárisan függetlenek. Bizonyítsuk be, hogy ha az $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2$ valós számokra $\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1 \neq 0$, akkor az $\alpha_1\mathbf{a} + \beta_1\mathbf{b}, \alpha_2\mathbf{a} + \beta_2\mathbf{b}$ vektorok is lineárisan függetlenek.
7. Legyen adott a V vektortér, és az X, Y, Z alterek úgy, hogy $X \supseteq Z$. Bizonyítsuk be, hogy

$$X \cap (\langle Y, Z \rangle) = \langle (X \cap Y), Z \rangle.$$

Zárthelyi dolgozat
2007. november 6.
D csoport

Pontozás. Az 1. feladatnál a válaszokat nem kell indokolni, minden helyes válaszra 2, minden hibás válaszra -2 , minden megválaszolatlan kérdésre 0 pont jár. A további (2.-7.) feladatoknál a megoldásokat indokolni kell, a végeredmény pusztá közlése gyakorlatilag értéktelen. Minden feladat teljes megoldása 10 pontot ér. **Érdemjegy.** A megszerzett pontok számának tizede, így nemcsak egész jegyeket lehet szerezni.

1. Döntsük el, hogy **(I)**gazak vagy **(H)**amisak a következő állítások.
 - (a) Ha egy vektortérben van 9 elemű bázis, akkor nincs benne 8 elemű bázis.
 - (b) Ha egy vektortérben néhány (legalább 1) vektor összege $\mathbf{0}$, akkor összefüggők.
 - (c) Ha egy vektorrendszer lineárisan összefüggő, akkor tetszőleges vektora felírható a többi vektorának lineáris kombinációjaként.
 - (d) Ha egy vektorrendszer egy bázisban lineárisan független, akkor minden bázisban lineárisan független.
 - (e) Ha az $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ térvektorokra az $\mathbf{ab}$ skaláris szorzat pozitív, és a $\mathbf{bc}$ skaláris szorzat pozitív, akkor az $\mathbf{ac}$ skaláris szorzat is pozitív.
2. Oldjuk meg az alábbi lineáris egyenletrendszert. (Használható: Gauss-elimináció, elemi bázistranszformáció.)

$$\begin{aligned}x + 3y + 2z &= 3 \\5x + 11y + 7z &= 11 \\13x + 19y + 17z &= 43.\end{aligned}$$

3. Egy háromszöget a tér egy pontjából a kétszeresére nagyítottunk, és a kapott háromszög súlypontja éppen az lett, ami az eredetié is volt. Mely pontból nagyítottunk?
4. A $\mathbb{R}^5$ vektortérben tekintsük a következő halmazt:

$$U = \left\{ \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} : x_1^3 + x_2^3 = 0, x_1 x_2 \geq 0, 3x_3 = 5x_5 \right\}.$$

Bizonyítsuk be, hogy U altér $\mathbb{R}^5$ -ben, és adjunk meg benne bázist.

5. Vannak-e az $\mathbb{R}^3$ vektortérben olyan kétdimenziós U, V alterek, melyekre $U \cap V = \{\mathbf{0}\}$?
6. Az $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ vektorok lineárisan függetlenek. Bizonyítsuk be, hogy ha az $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2$ valós számokra $\alpha_1 \beta_2 - \alpha_2 \beta_1 \neq 0$, akkor az $\alpha_1 \mathbf{a} + \beta_1 \mathbf{b}, \alpha_2 \mathbf{a} + \beta_2 \mathbf{b}$ vektorok is lineárisan függetlenek.
7. Legyen adott a V vektortér, és az X, Y, Z alterek úgy, hogy $X \supseteq Z$. Bizonyítsuk be, hogy

$$X \cap \langle Y, Z \rangle = \langle (X \cap Y), Z \rangle.$$