

Sem írott, sem elektronikus segédeszköz nem használható. A feladatok megoldására 90 perc áll rendelkezésre. MINDEN FELADAT MEGOLDÁSA KÜLÖN LAPRA IRANDÓ!

1. Igazak vagy Hamisak az alábbi állítások? (A választ karikázza be, indokolnia nem kell. Minden helyes válasz 2 pont, minden rossz válasz -2 pont, nincs válasz: 0 pont.)

I H Van olyan $A, B, C \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$, hogy $ABC = \mathbf{0}$, de $CBA \neq \mathbf{0}$.

I H Van olyan $A, B \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$, hogy $\varrho(A) = \varrho(B) = \varrho(AB) = \varrho(BA) = 1$.

I H Ha $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ invertálható, akkor A^3 is invertálható.

I H $\lambda \det(A) = \det(\lambda^n A)$

I H Van végtelen sok olyan lineáris transzformáció, amelynek végtelen sok bázisban invertálható a mátrixa.

A többi feladat megoldását részletezni kell, az eredmény önmagában nem elegendő. Minden feladat értéke 10 pont.

2. $\alpha \in \mathbb{R}$, $A = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -\alpha & \alpha \end{bmatrix}$. $\varrho(A)$, $|A|$, A^{-1} (ha $\exists$), összes $A^{(g)}$?

3. Számítsa ki az alábbi n -szer n -es ($n \geq 3$) determináns értékét! (A főátló alatti átlóban végig 0 van.)

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \end{vmatrix}$$

4. Számítsa ki az alábbi n -szer n -es ($n \geq 2$) determináns értékét!

$$\begin{vmatrix} 3 & 4 & 4 & \dots & 4 \\ 2 & 3 & 4 & \dots & 4 \\ 2 & 2 & 3 & \dots & 4 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 2 & 2 & 2 & \dots & 3 \end{vmatrix}$$

5. Legyen $\varphi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, $\varphi \left(\begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} \alpha + \beta \\ \beta + \gamma \\ \gamma + \alpha \end{bmatrix}$.

a) φ vektortér-homomorfizmus-e?

b) φ vektortér-izomorfizmus-e?

6. Jelöljük φ -vel a síknak az y tengelyre való tükrözését, ψ -vel pedig az origó körüli $+60^\circ$ -os forgatást. Írja fel φ és ψ mátrixát az $\mathbf{i}, \mathbf{j}$ bázisban. Igaz-e, hogy $\varphi\psi = \psi\varphi$?

7. $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, A tükröző mátrix ($A^2 = I_n$).

a) Mi lehet $|A + I_n|$?

b) Mi lehet a $\lambda_0 \in \mathbb{R}$, ha $|A - \lambda_0 I_n| = 0$?

5: 46–70 pont; 4,5: 41–45 pont; 4: 36–40 pont; 3,5: 31–35 pont; 3: 26–30 pont; 2,5: 21–25 pont; 2: 16–20 pont; 1,5: 11–15 pont; 1: –10–10 pont.