

Sem írott, sem elektronikus segédeszköz nem használható. A feladatok megoldására 90 perc áll rendelkezésre. MINDEN FELADAT MEGOLDÁSA KÜLÖN LAPRA IRANDÓ!

1. Igazak vagy Hamisak az alábbi állítások? (A választ karikázza be, indokolnia nem kell. Minden helyes válasz 2 pont, minden rossz válasz -2 pont, nincs válasz: 0 pont.)

I H Az $\mathbf{i} - \mathbf{k}$ és az $\mathbf{i} + \mathbf{k}$ térvektorok hajlásszöge 45° .

I H Az $\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + \mathbf{k}$ és az $\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}$ térvektorok skaláris szorzata nem 0.

I H $\mathbb{R}^{n+1}$ -ben van n elemű generátorrendszer.

I H $\mathbb{R}^n$ -ben minden n elemű lineárisan független rendszer bázis.

I H Ha az $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ térvektorokra teljesül, hogy $|\mathbf{a}| = |\mathbf{b}| = 1$, $|\mathbf{c}| = \sqrt{2}$, továbbá $-\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c} \perp \mathbf{a}$, $\mathbf{a} - \mathbf{b} + \mathbf{c} \perp \mathbf{b}$, és $\mathbf{a} + \mathbf{b} - \mathbf{c} \perp \mathbf{c}$, akkor $|\mathbf{a} + \mathbf{b} - \mathbf{c}| = 1$.

A többi feladat megoldását részletezni kell, az eredmény önmagában nem elegendő. Minden feladat értéke 10 pont.

2. $\alpha \in \mathbb{R}$ olyan, hogy az $\mathbf{a} = (\alpha + 1)\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}$, $\mathbf{b} = \mathbf{i} + \mathbf{j} + (\alpha + 1)\mathbf{k}$, $\mathbf{c} = \mathbf{i} + (\alpha + 1)\mathbf{j} + \mathbf{k}$ térvektorrendszer lineárisan összefüggő. Mi lehet a $\gamma(\mathbf{a}, \mathbf{b})$?

3. Legyen $V = \left\{ \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix} \mid \alpha_i \in \mathbb{R} \right\}$, + szokásos, de $\lambda \bullet \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix}$, ha $\lambda \geq 0$,

viszont $\lambda \bullet \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\alpha_1 \\ \vdots \\ -\alpha_n \end{bmatrix}$, ha $\lambda < 0$. Vektortér-e V az $\mathbb{R}$ felett +, $\lambda \bullet$ -re nézve?

4. V vektortér $\mathbb{R}$ felett; $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_4 \in V$ -ben, $\mathbf{a}_1 = \mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_2 + 3\mathbf{e}_4$, $\mathbf{a}_2 = \mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3 + \mathbf{e}_4$, $\mathbf{a}_3 = -\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3 + \mathbf{e}_4$, $\mathbf{b} = 4\mathbf{e}_1 + 5\mathbf{e}_2 + 3\mathbf{e}_3 + 12\mathbf{e}_4$. Az elemi bázistranszformáció módszerével döntsük el, hogy $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$ L-e; $\mathbf{b}$ eleme-e $\langle \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3 \rangle$ -nek; és adjunk meg egy bázist $\langle \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3 \rangle$ -ben!

5. Oldja meg az alábbi lineáris egyenletrendszert (HASZNÁLHATÓ: Gauss-elimináció, elemi bázistranszformáció)!

$$\begin{array}{rcl} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 & = & 2 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 & = & -4 \\ x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 & = & 5 \\ 2x_1 + x_3 - x_4 & = & -2 \end{array}$$

6. Legyen $\gamma, \delta \in \mathbb{R}$ adott,

$$W_1 = \left\{ \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \end{bmatrix} \mid \begin{array}{l} \alpha_i \in \mathbb{R} \\ \alpha_1 = \alpha_2 \\ \text{és} \\ \alpha_3 = \gamma\delta\alpha_4 \end{array} \right\}, W_2 = \left\{ \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \\ \beta_4 \end{bmatrix} \mid \begin{array}{l} \beta_i \in \mathbb{R} \\ \gamma\beta_1^2 = \delta\beta_2 \end{array} \right\}.$$

a) W_1 illetve W_2 altere-e $\mathbb{R}^4$ -nek?

b) Ha valamelyik altér, abban keresendő B.

c) Ha mindkettő altér, akkor $\langle W_1, W_2 \rangle = ?$

7. $n \geq 3$; V vektortér $\mathbb{R}$ felett; $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n \in V$ -ben;

$$C = \{\mathbf{a}_1 - \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_2 - \mathbf{a}_3, \dots, \mathbf{a}_{n-1} - \mathbf{a}_n, \mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_3, \mathbf{a}_2 + \mathbf{a}_4, \dots, \mathbf{a}_{n-2} + \mathbf{a}_n\}.$$

α) C mikor $\in V$ -ben? β) $\dim\langle C \rangle = ?$

5: 46–70 pont; 4,5: 41–45 pont; 4: 36–40 pont; 3,5: 31–35 pont; 3: 26–30 pont; 2,5: 21–25 pont; 2: 16–20 pont; 1,5: 11–15 pont; 1: –10–10 pont.