

1. Amennyiben lehetséges, adja meg az alábbi mátrixegyenletek egy-egy megoldását.

$$\text{a) } \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 3 & 5 & 6 \end{bmatrix} \mathbf{X} = \mathbf{I}_2 \quad \text{b) } \mathbf{X} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 3 & 5 & 6 \end{bmatrix} = \mathbf{I}_3 \quad \text{c) } \mathbf{X} \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$$

2. Számítsa ki a következő mátrixok inverzét!

$$\mathbf{M}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{M}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 6 & 10 \\ 1 & 4 & 10 & 20 \end{bmatrix} \quad \mathbf{M}_3 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

3. Tegyük fel, hogy $ad - bc = 1$. Számítsa ki az $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ mátrix inverzét!

4. Az alábbi mátrixok közül melyik milyen speciális fajta mátrix (diagonális mátrix, háromszögmátrix, szimmetrikus mátrix, antiszimmetrikus mátrix, projektormátrix, nilpotens mátrix, invertálható mátrix)? Határozza meg az $\mathbf{M}_8$ összes általánosított inverzét!

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_4 &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{bmatrix} & \mathbf{M}_5 &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} & \mathbf{M}_6 &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} & \mathbf{M}_7 &= \begin{bmatrix} 1 & & \\ & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} \\ \mathbf{M}_8 &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & -3 \\ -2 & 3 & 0 \end{bmatrix} & \mathbf{M}_9 &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 9 \\ 0 & 5 & 2 \\ 1 & 4 & 7 \end{bmatrix} & \mathbf{M}_{10} &= \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix} & \mathbf{M}_{11} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ \mathbf{M}_{12} &= \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -6 & -2 \end{bmatrix} & \mathbf{M}_{13} &= \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -4 & -2 \end{bmatrix} & \mathbf{M}_{14} &= \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -4 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

5*. Tegyük föl, hogy egy $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ mátrixra $\mathbf{A}^2 = \mathbf{0}$. Igazolja, hogy ekkor $\mathbf{I}_n + \mathbf{A}$ invertálható mátrix, és határozza meg az inverzét!

6. Számítsa ki az $\mathbf{A}$, $\mathbf{A}^{-1}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{B}^{-1}$, $\mathbf{A} + \mathbf{B}$, $\mathbf{AB}$ és $\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}^{-1}$ mátrixok determinánsát!

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

7. Határozza meg a következő permutációkban az inverziók számát!

$$\text{a) } 5, 2, 4, 1, 6, 3; \quad \text{b) } n, n-1, \dots, 2, 1; \quad \text{c) } 2, 3, \dots, n, 1.$$

8. Számítsa ki az alábbi determinánsokat az elemi bázistranszformáció módszerével! A számítások mely része szükségtelen a determináns értékének meghatározásához?

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 6 & 10 \\ 1 & 4 & 10 & 13 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 0 & 0 & 3 & 2 \\ 2 & 4 & 0 & 2 \\ 4 & 9 & 2 & 6 \\ 3 & 6 & 3 & 9 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 0 & 2 & 4 & 3 \\ 0 & 4 & 9 & 6 \\ 3 & 0 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 7 & 6 \end{vmatrix}$$

$$9. \quad \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ -1 & 0 & 3 & \dots & n \\ -1 & -2 & 0 & \dots & n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \\ -1 & -2 & -3 & \dots & 0 \end{vmatrix} = ? , \quad \begin{vmatrix} 1 & & & & \\ & 2 & & & \\ & & \mathbf{2} & & \\ & & & 3 & \\ & \mathbf{2} & & & \ddots \\ & & & & & n \end{vmatrix} = ?$$