

1. Legyen $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 7 \end{bmatrix}$, $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & -36 \\ -2 & 1 \\ 3 & 13 \end{bmatrix}$, $\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 3 & -2 & 1 \\ -1 & 3 & 2 \end{bmatrix}$. Végezze el a

kijelölt mátrixműveletek közül azokat, amelyek értelmezve vannak: $\mathbf{AB}$, $\mathbf{A} + \mathbf{C}$, $2\mathbf{A} + \mathbf{B}^\top$, $\mathbf{BA}$, $\mathbf{CA}$, $\mathbf{AC}$, $\mathbf{C}^2$, $\mathbf{AA}^\top$, $\mathbf{CC}^\top$.

2. Egy $\mathbf{A}$ mátrixot *szimmetrikus*nak nevezünk, ha $\mathbf{A}^\top = \mathbf{A}$.

a) Az előző feladat megoldásában kapott mátrixok közül melyek szimmetrikusak?

b) Bizonyítsa be, hogy $\mathbf{AA}^\top$ mindig szimmetrikus mátrix.

c) Igazolja, hogy az n -szer n -es mátrixok vektorterében a szimmetrikus mátrixok alteret alkotnak.

d) Hány dimenziós ez az altér?

3. Számítsa ki a következő mátrixhatványokat:

a) $\begin{bmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ \sin \alpha & -\cos \alpha \end{bmatrix}^2$ b) $\begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix}^2$ c) $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^n$ d) $\begin{bmatrix} 2 & -4 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}^n$ e) $\begin{bmatrix} 0,5 & 0,5 \\ 0,5 & 0,5 \end{bmatrix}^n$

4. Mi történik egy $n \times n$ -es mátrixszal, ha balról, illetve jobbról az alábbi mátrixokkal megszorozzuk?

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \dots & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

5. Igazak-e minden $n \times n$ -es $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ mátrixra az alábbi egyenlőségek?

a) $(\mathbf{A} + \mathbf{B})(\mathbf{A} - \mathbf{B}) = \mathbf{A}^2 - \mathbf{B}^2$;

b) $(\mathbf{A} + \mathbf{I}_n)(\mathbf{A} - \mathbf{I}_n) = \mathbf{A}^2 - \mathbf{I}_n^2$;

c) $(\mathbf{A} + \mathbf{B})^2 = \mathbf{A}^2 + 2\mathbf{AB} + \mathbf{B}^2$;

d) $(\mathbf{AB})^\top = \mathbf{A}^\top \mathbf{B}^\top$.

6*. Mutassa meg, hogy bármely 2×2 -es $\mathbf{A}$ mátrixra az $\mathbf{I}_2$, $\mathbf{A}$, $\mathbf{A}^2$ mátrixok lineárisan összefüggők.

7. Mennyi az összes olyan $k \times n$ -es mátrix összege, amelyekben csak 0 és 1 fordul elő?

8. Számítsa ki az alábbi mátrixok rangját:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix} \quad \mathbf{AA}^\top \quad \mathbf{A}^\top \mathbf{A} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 0 & 4 \\ 1 & 0 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 0 & 4 \\ 1 & 0 & 3 & 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{D} = \begin{bmatrix} 0 & a & b \\ -a & 0 & c \\ -b & -c & 0 \end{bmatrix}$$

9. Írjon föl olyan 2×3 -as mátrixokat, amelyek rangja 0, 1, 2, ill. 3.

10. Igazak-e a következő állítások?

a) $\rho(\mathbf{BA}) = \rho(\mathbf{AB})$

b) $\rho(\mathbf{A}^\top) = \rho(\mathbf{A})$

c) $\rho(\mathbf{A} - \mathbf{B}) \leq \rho(\mathbf{A}) - \rho(\mathbf{B})$

d) $\rho(\mathbf{A}^n) \leq \rho(\mathbf{A})$

11. Igazolja, hogy minden 1 rangú mátrix felírható egy oszlopvektor és egy sorvektor mátrixszorzataként.

12. Írja föl a 8. feladatbeli $\mathbf{A}$ mátrixot egy 3×2 -es és egy 2×3 -as mátrix szorzataként!