

1. (ISM) Legyen $\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_5$ egy bázis és $\mathbf{a} = 2\mathbf{b}_2 + \mathbf{b}_4 - \mathbf{b}_5$. Mely bázisvektorok "cserélhetőek ki" \mathbf{a} -ra úgy, hogy bázist kapjunk? Mindegyik új bázisban számítsa ki a $\mathbf{c} = \mathbf{b}_1 + 2\mathbf{b}_2 + 3\mathbf{b}_3 + 4\mathbf{b}_4$ vektor koordinátáit!

2. Határozza meg (elemi bázistranszformációk segítségével) az alábbi vektorrendszerek rangját:

a) $[2, 3, 1, 3]^\top, [5, 2, 3, 1]^\top, [1, 2, 0, 3]^\top, [6, 0, 1, 4]^\top, [3, 4, 2, 3]^\top;$

b) $[0, 1, 2, 3]^\top, [1, 2, 3, 0]^\top, [2, 3, 0, 1]^\top, [3, 0, 1, 2]^\top.$

3. Az elemi bázistranszformáció módszerével oldja meg a következő egyenletrendszereket:

$$\begin{array}{rcl} -x + 3y + 3z & = & 2 \\ 3x + y + z & = & 4 \\ 2x - 2y + 3z & = & 10 \end{array} \quad \begin{array}{rcl} 2x_1 + 3x_2 + x_3 & = & 11 \\ x_1 - x_2 - 2x_3 & = & -7 \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 & = & 2 \end{array} \quad \begin{array}{rcl} 2x + 3y + z & = & 11 \\ x - y - 2z & = & -7 \\ 3x + 2y - z & = & 4 \end{array}$$

4. Oldja meg a következő egyenletrendszereket! Milyen következtetés adódik ebből a lineáris egyenletrendszerek numerikus megoldására nézve?

$$\begin{array}{rcl} x + y & = & 2 \\ x + 1,001y & = & 2,001 \end{array} \quad \begin{array}{rcl} x + y & = & 2 \\ x + y & = & 2,001 \end{array} \quad \begin{array}{rcl} x + y & = & 2 \\ x + 1,001y & = & 2,002 \end{array}$$

5*. Hogyan függ az alábbi egyenletrendszer megoldásainak száma az r paraméter értékétől?

$$\begin{array}{rcl} rx_1 + x_2 + x_3 & = & 1 \\ x_1 + rx_2 + x_3 & = & 1 \\ x_1 + x_2 + rx_3 & = & 1 \end{array}$$

6. Bizonyítsa be, hogy $r(\mathbf{a}_1 + \mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{a}_n + \mathbf{b}_n) \leq r(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n) + r(\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_n)$.

7. Egy n -dimenziós vektortérben melyek igazak a következő állítások közül?

a) Minden n -nél kevesebb vektorból álló vektorrendszer lineárisan független.

b) Minden n -nél több vektorból álló vektorrendszer lineárisan összefüggő.

c) Minden generátorrendszer legalább n vektorból áll.

d) Minden legalább n vektorból álló vektorrendszer a tér generátorrendszere.

e) Minden n elemű generátorrendszer a vektortér bázisa.

f) Minden n elemű lineárisan független vektorrendszer a tér bázisa.

8. Az \mathbb{R}^n alábbi részhalmazai közül válassza ki az altereket, s ezekben keressen bázist:

a) $x_1 = x_2 = \dots = x_n$ b) $x_3 = x_4 = \dots = x_n = 0$

c) $x_1 = x_3 = x_5 = \dots$ és $x_2 = x_4 = x_6 = \dots$

d) van olyan i , hogy $x_i = 0$ e) van olyan i , hogy $x_i \neq 0$

f) $x_1 = x_4 = x_7 = \dots, x_2 = x_5 = x_8 = \dots, x_3 = x_6 = x_9 = \dots$

g*) adott $y \in \mathbb{R}$ mellett $x_1 + x_2 + \dots + x_n = y$.

9*. Határozza meg az előző feladatban előforduló alterekből alkotható altérpárok által generált altereket!

10*. Bizonyítsa be, hogy az $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ függvények szokásos \mathbb{R} feletti vektorterében a páros függvények is és a páratlan függvények is alteret alkotnak. Határozza meg e két alter által generált alteret!