Lineáris algebra (A, B, C) 4. gyakorlat 2007. október 1–5.

1. Vektorteret alkotnak-e a pozitív valós számok a valós számtest felett, ha a műveleteket a következőképpen értelmezzük: $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ összege legyen $\mathbf{ab}$, $\mathbf{a}$ λ-szorosa pedig $\mathbf{a}^\lambda$?

2. $\mathbb{R}^n$-en a szokásos összeadás mellett értelmezzük a λ valós számmal való szorzást a következő módokon:

$$\text{a) } \lambda \bullet \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \quad \text{b) } \lambda \bullet \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \quad \text{c) } \lambda \bullet \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda x_1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

Mely vektortér-axiómák teljesülnek az így definiált műveletekre?

3. Vezessük le a vektortér axiómáiból, hogy $(-1)\mathbf{a} = -\mathbf{a}$!

4. Melyek igazak az alábbi állítások közül?
a) Ha $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$ és $\lambda\mathbf{a} = \mu\mathbf{a}$, akkor $\lambda = \mu$.
b) Ha $\lambda \neq 0$ és $\lambda\mathbf{a} = \lambda\mathbf{b}$, akkor $\mathbf{a} = \mathbf{b}$.
c) Ha $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$, $\mathbf{b} \neq \mathbf{0}$, $\lambda \neq 0$, $\mu \neq 0$ és $\lambda\mathbf{a} = \mu\mathbf{b}$, akkor $\mathbf{a} = \mathbf{b}$ és $\lambda = \mu$.

5*. Bizonyítsuk be, hogy az összeadás kommutativitása következik a vektortér többi axiómájából.

6. $\mathbb{R}^4$-ben az alább kijelölt részhalmazok közül melyek alkotnak alteret?
a) $4x_1 - 3x_3 + x_4 = 0$; b) $x_1x_2 = x_3x_4$; c) $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = 0$;
d) $x_1 \geq x_2$; e) $x_1 + 4x_4 = 2$; f) $x_4^3 = 0$.

7. Bizonyítsuk be, hogy ha egy $\mathbb{R}$ feletti vektortér nem-üres U részhalmazára

$$\lambda \in \mathbb{R}, \mathbf{a}, \mathbf{b} \in U \Longrightarrow \lambda\mathbf{a} + \mathbf{b} \in U,$$

akkor U altér.

8. Legyen U egy altér a V vektortérben, $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ pedig V-beli vektorok, amelyekről azt tudjuk, hogy $\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c}$ és $2\mathbf{a} + \mathbf{b} + 2\mathbf{c}$ U-ban van, ám $\mathbf{b} + 3\mathbf{c}$ nem eleme U-nak. Az $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ vektorok közül melyik van U-ban?

9. Legyen $\mathbf{a} = \mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}$, $\mathbf{b} = \mathbf{i} - \mathbf{j} + \mathbf{k}$, $\mathbf{c} = \mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 4\mathbf{k}$. Az alábbi alterek közül melyikben van benne a $2\mathbf{i} + \mathbf{j} - \mathbf{k}$ vektor?
a) $\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle$; b) $\langle \mathbf{a}, \mathbf{c} \rangle$; c) $\langle \mathbf{b}, \mathbf{c} \rangle$.

10. Tegyük fel, hogy $\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c} = \mathbf{0}$. Bizonyítsuk be, hogy $\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = \langle \mathbf{a}, \mathbf{c} \rangle = \langle \mathbf{b}, \mathbf{c} \rangle$.

11. Legyenek U_1 és U_2 a V vektortér alterei. Mi annak a szükséges és elégséges feltétele, hogy a két altér egyesítése (uniója), $U_1 \cup U_2$ is altér legyen?