

1. Számítsa ki az $\mathbf{a}\mathbf{b}$ skalárszorzatot a következő esetekben:

- a) $|\mathbf{a}| = \sqrt{3}$, $|\mathbf{b}| = 2$, szög = 30° ; b) $|\mathbf{a}| = \sqrt{5}$, $|\mathbf{b}| = 1$, szög = $\pi/2$;
c) $|\mathbf{a}| = 3$, $|\mathbf{b}| = 2$, szög = 180° ; d) $|\mathbf{a}| = 1$, $|\mathbf{b}| = 1$, szög = 0 ;
e) $|\mathbf{a}| = \sqrt{2}$, $|\mathbf{b}| = 3$, szög = 135° ; f) $|\mathbf{a}| = \sqrt{2}$, $|\mathbf{b}| = \sqrt{2}$, szög = $\pi/3$.

2. Határozza meg az $\mathbf{a} = \mathbf{i} + \mathbf{j}$, $\mathbf{b} = \mathbf{j} + \mathbf{k}$, $\mathbf{c} = \mathbf{i} + 2\mathbf{j} - 2\mathbf{k}$ vektorok által páronként bezárt szögeket.

3. Legyen $\mathbf{e} = \frac{1}{3}\mathbf{i} + \frac{2}{3}\mathbf{j} + \frac{2}{3}\mathbf{k}$. Ellenőrizze, hogy $\mathbf{e}$ egységvektor, és számítsa ki az $\mathbf{a} = \mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}$ vektornak $\mathbf{e}$ -vel párhuzamos és $\mathbf{e}$ -re merőleges összetevőjét.

4. Legyen A, B, C, D négy pont a térben. Tudjuk, hogy $\overrightarrow{AB}$ merőleges $\overrightarrow{CD}$ -re és $\overrightarrow{AC}$ merőleges $\overrightarrow{BD}$ -re. Igazolja, hogy ekkor $\overrightarrow{AD}$ merőleges $\overrightarrow{BC}$ -re.

5. Bizonyítsa be, hogy egy paralelogramma négy oldalhosszának négyzetösszege megegyezik a két átló hosszának négyzetösszegével.

6. $\mathbf{a} \perp \mathbf{b}$, $\mathbf{a} + \mathbf{c} \perp \mathbf{b} + \mathbf{c}$, $\mathbf{a} + \mathbf{b} \perp \mathbf{c}$ esetén mi lehet a $\mathbf{c}$?

7*. $\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c} = \mathbf{0}$ és $|\mathbf{a}| = |\mathbf{b}| = |\mathbf{c}| = 1$ alapján számítsa ki $\mathbf{ab} + \mathbf{bc} + \mathbf{ca}$ értékét geometriai és algebrai úton is!

8. Adott $\lambda \in \mathbb{R}$ esetén mely $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ vektorpárokra teljesül, hogy $\mathbf{a} + \lambda\mathbf{b} \perp \mathbf{a}$ és $\mathbf{a} - \lambda\mathbf{b} \perp \mathbf{b}$?

9*. Mely $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ vektorpárokra teljesül, hogy minden $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ -re $\alpha\mathbf{a} + \beta\mathbf{b} \perp \beta\mathbf{a} - \alpha\mathbf{b}$?

10*. $\mathbf{a} + 3\mathbf{b} \perp 7\mathbf{a} - 5\mathbf{b}$ és $\mathbf{a} - 4\mathbf{b} \perp 7\mathbf{a} - 2\mathbf{b}$ esetén mi lehet $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ hajlásszöge?