Lineáris algebra (A, B, C) 11. gyakorlat 2007. november 26–30.

1. Az alábbi leképezések közül válassza ki a lineáris leképezéseket, a lineáris transzformációkat és a vektortér–izomorfizmusokat, határozza meg mindezek magterét és képterét, valamint ezeknek az altereknek a dimenzióját!

$$\varphi_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}\,, \quad \varphi_1(\begin{bmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\end{bmatrix}) = \alpha_1+\alpha_2 \qquad \varphi_2 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2\,, \quad \varphi_2(\begin{bmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\\ \alpha_3\end{bmatrix}) = \begin{bmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\end{bmatrix}$$

$$\varphi_3 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3\,, \quad \varphi_3(\begin{bmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\\ \alpha_3\end{bmatrix}) = \begin{bmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\\ 0\end{bmatrix} \qquad \varphi_4 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}\,, \quad \varphi_4(\begin{bmatrix}\alpha\\ \beta\end{bmatrix}) = \alpha\beta$$

$$\varphi_5 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2\,, \quad \varphi_5(\begin{bmatrix}\alpha\\ \beta\end{bmatrix}) = \begin{bmatrix}\alpha+\beta\\ \alpha\end{bmatrix} \qquad \varphi_6 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2\,, \quad \varphi_6(\begin{bmatrix}\alpha\\ \beta\\ \gamma\end{bmatrix}) = \begin{bmatrix}|\alpha|\\ 0\end{bmatrix}$$

2. Mik azok a geometriai transzformációk, amelyeknek mátrixa az **i**, **j**, **k** bázisban az alábbi:

$$\begin{bmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix}1&0&0\\0&0&-1\\0&1&0\end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix}0&0&1\\1&0&0\\0&1&0\end{bmatrix}$$

3. Írjuk fel az **i**, **j** bázisra vonatkozó mátrixát a sík alábbi lineáris transzformációinak:
a) 60°–os forgatás; b) az x tengelyre való tükrözés;
c) 270°–os forgatás; d) az $x = y$ tengelyre való tükrözés.

4. Legyen $\underline{e}_1$, $\underline{e}_2$ bázis $\mathbb{R}^2$–ben, $\varphi \in \mathrm{Hom}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$, $[\varphi]^{\underline{e}} = \begin{bmatrix}2&-1\\5&-3\end{bmatrix}$. Írja fel a $[\varphi]^{\underline{e}'}$ mátrixot, ha $\underline{e}'_1 = -3\underline{e}_1 + 7\underline{e}_2$, $\underline{e}'_2 = \underline{e}_1 - 2\underline{e}_2$. (Bázis lesz–e valóban $\underline{e}'_1$, $\underline{e}'_2$?)

5. Legyen ξ_1 a síknak az x tengelyre, η_1 pedig az y tengelyre való tükrözése, továbbá ξ_2, illetve η_2 ugyanezekre a tengelyekre való merőleges vetítések. Számítsa ki a $\xi_1 + \eta_1$ és a $\xi_2 + \eta_2$ összegeket!

6. Írja fel a mátrixát az **i**, **j**, **k** bázisban az x tengely és az y tengely körüli 90°–os forgatásnak. Mi a két transzformáció szorzata? (Számítsa ki a két mátrix szorzatát!)

7. Az alábbi mátrixok egy–egy lineáris transzformáció mátrixai az **i**, **j**, **k** bázisban. Adja meg ugyanezeknek a lineáris transzformációknak a mátrixát az **i**, **i** + **j**, **i** + **j** + **k** bázisban!

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix}3&-1&-1\\0&2&-1\\0&0&1\end{bmatrix} \qquad \mathbf{B} = \begin{bmatrix}1&0&0\\1&0&-1\\0&1&-1\end{bmatrix}$$

8. Számítsa ki a következő mátrixok karakterisztikus polinomját, sajátértékeit és sajátvektorait:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{D} = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -4 & -1 & 0 \\ 4 & -8 & -2 \end{bmatrix} \quad \mathbf{H} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}$$

9. Keressünk olyan mátrix**ok**at, amelyek karakterisztikus polinomja
a) $\lambda^2 - 3\lambda + 7$;
b) $-\lambda^3 + \lambda$;
c) $\lambda^4 - 4\lambda^3 + 6\lambda^2 - 4\lambda + 1$.

10. Mi a kapcsolat $\mathbf{M}$ és $\mathbf{M}^{-1}$ sajátvektorai, ill. sajátértékei között?

11. Mit állíthatunk a $\mathbf{T}$ mátrix valós sajátértékeiről, ha
a) $\mathbf{T}^4 = \mathbf{0}$; b) $\mathbf{T}^5 = \mathbf{I}_n$; c) $\mathbf{T}^6 = \mathbf{I}_n$?

12. Legyen V vektortér $\mathbb{C}$ ill. $\mathbb{R}$ felett; $\underline{e}_1, \underline{e}_2$ bázis V–ben; $\varphi \in \mathrm{Hom}(V, V)$. Melyek a φ sajátértékei, sajátvektorai, van–e SB, ha $[\varphi]^{\underline{e}}$

a) $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ d) $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$?

A felsorolt mátrixok diagonalizálhatók–e $\mathbb{C}$ felett ill. $\mathbb{R}$ felett?

13. Tegyük föl, hogy az $\mathbf{A}$ diagonalizálható mátrix karakterisztikus polinomja $(3-\lambda)^n$. Mi lehet az $\mathbf{A}$ mátrix?

14. Bizonyítsa be, hogy ha egy mátrix négyzete az egységmátrix, akkor diagonalizálható.