Lineáris algebra (A, B, C) 10. gyakorlat 2007. november 19–23.

1. Számítsa ki a következő mátrixok determinánsát! Megjegyzés: Ahol nincs más feltüntetve, ott a mátrix $n \times n$–es.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 3 & 5 & 7 & 5 \\ 4 & 4 & 4 & 4 \\ 0 & 1 & 6 & 1 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 2 \\ 5 & 2 & 8 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{D} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 6 \\ 2 & 0 & 5 & 7 \\ 3 & 0 & 9 & 3 \\ 4 & 0 & 2 & 8 \end{bmatrix};$$

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 7 \\ 6 & 5 & 2 & 5 & 9 \\ 1 & 1 & 7 & 2 & 4 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{K} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1,n-2} & a_{1,n-1} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2,n-2} & a_{2,n-1} & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3,n-2} & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n-2,1} & a_{n-2,2} & a_{n-2,3} & \dots & 0 & 0 & 0 \\ a_{n-1,1} & a_{n-1,2} & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ a_{n,1} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix};$$

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{M} = \begin{bmatrix} a & b & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & b & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a & b & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & a & b \\ b & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & a \end{bmatrix}; \quad \mathbf{N} = \begin{bmatrix} 13 & 15 & -2 \\ 0 & 6 & 8 \\ 10 & 4 & 14 \end{bmatrix};$$

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} 1 & a_1 & a_2 & a_3 & \dots \\ 1 & a_1+b_1 & a_2 & a_3 & \dots \\ 1 & a_1 & a_2+b_2 & a_3 & \dots \\ 1 & a_1 & a_2 & a_3+b_3 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}; \quad \mathbf{S} = \begin{bmatrix} 1 & b_1 & 0 & 0 & \dots \\ -1 & 1-b_1 & b_2 & 0 & \dots \\ 0 & -1 & 1-b_2 & b_3 & \dots \\ 0 & 0 & -1 & 1-b_3 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}.$$

2. Határozza meg $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ determinánsát, ha ${}_j[\mathbf{A}]_k$ a következő alakú (a_j , $b_k \in \mathbb{R}$) :

(a) $(-1)^{j+k}\frac{k^2}{j}$ (b) $(-1)^k\sqrt{j}k^3$
(c) $a_j + b_k$ (d) $1 + a_j b_k$
(e) $j + k - 1$ (f*) $(j + k - 1)^2$

3. Legyen $\mathbf{U}$ olyan 99–szer 99–es mátrix, amelyre $\mathbf{U}^\top = -\mathbf{U}$. Mennyi $\det \mathbf{U}$?

4. Adjunk képletet $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^{-1}$ kiszámítására!

5. Legyen $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$, és tegyük fel, hogy $\det \mathbf{A} \neq 0$. Képezzük az $\mathbf{A}$ mátrix előjelezett aldeterminánsaiból álló $\mathbf{B}$ mátrixot, azaz legyen $b_{ij} = \mathbf{A}_{ij}$, majd ismételjük meg ugyanezt a $\mathbf{B}$ mátrixszal, így nyerjük a $\mathbf{C}$ mátrixot, ahol $c_{ij} = \mathbf{B}_{ij}$. Bizonyítsuk be, hogy $\mathbf{C}$ az $\mathbf{A}$ mátrix valahányszorosa. (Útmutatás: Fejezzük ki $\mathbf{B}$–t $\mathbf{A}^{-1}$ segítségével!)

6. $$\begin{vmatrix} 2 & 1 & & & \\ 1 & 2 & 1 & \mathbf{0} & \\ & 1 & \ddots & \ddots & \\ & \mathbf{0} & \ddots & 2 & 1 \\ & & & 1 & 2 \end{vmatrix}_{n\times n} = ?\,, \qquad \begin{vmatrix} 2/x & 1/x^2 & & & \\ 1 & 2/x & 1/x^2 & \mathbf{0} & \\ & 1 & \ddots & \ddots & \\ & \mathbf{0} & \ddots & 2/x & 1/x^2 \\ & & & 1 & 2/x \end{vmatrix}_{n\times n} = ?$$

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & & & \\ 1 & 0 & 1 & \mathbf{0} & \\ & 1 & \ddots & \ddots & \\ & \mathbf{0} & \ddots & 0 & 1 \\ & & & 1 & 0 \end{vmatrix}_{n\times n} = ?\,, \qquad \begin{vmatrix} \alpha+\beta & \alpha\beta & & & \\ 1 & \alpha+\beta & \alpha\beta & \mathbf{0} & \\ & 1 & \ddots & \ddots & \\ & \mathbf{0} & \ddots & \alpha+\beta & \alpha\beta \\ & & & 1 & \alpha+\beta \end{vmatrix}_{n\times n} = ?$$

7*. $$\begin{vmatrix} \cos\varphi & 1 & & & \\ 1 & 2\cos\varphi & 1 & \mathbf{0} & \\ & 1 & \ddots & \ddots & \\ & \mathbf{0} & \ddots & 2\cos\varphi & 1 \\ & & & 1 & 2\cos\varphi \end{vmatrix}_{n\times n} = ?\,, \qquad \begin{vmatrix} 2\cos\varphi & 1 & & & \\ 1 & 2\cos\varphi & 1 & \mathbf{0} & \\ & 1 & \ddots & \ddots & \\ & \mathbf{0} & \ddots & 2\cos\varphi & 1 \\ & & & 1 & 2\cos\varphi \end{vmatrix}_{n\times n} = ?$$

8. Keresendő olyan $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{2\times 2}$, melyre $\rho(\mathbf{A}^\top \mathbf{A}) \neq \rho(\mathbf{A})$. Egy ilyen példában mi lehet $|\mathbf{A}|$?

9. $\underline{x}\,, \underline{y} \in \mathbb{C}^n$ esetén legyen $(\underline{x}\,, \underline{y}) = \underline{x}^* \underline{y}$, $||\underline{x}|| = \sqrt{(\underline{x}\,, \underline{x})}$. Hasonlítsa össze $(\underline{x}\,, \underline{y})$ és a térvektorok skaláris szorzatának tulajdonságait: $(\underline{y}\,, \underline{x})$ és $(\underline{x}\,, \underline{y})$; $(\underline{x}\,, \lambda\underline{y})$ és $(\lambda\underline{x}\,, \underline{y})$ és $\lambda(\underline{x}\,, \underline{y})$; $(\underline{x}\,, \underline{y}+\underline{z})$ és $(\underline{x}\,, \underline{y}) + (\underline{x}\,, \underline{z})$; $(\underline{x}\,, \underline{x})$ és 0 kapcsolata? Hasonlítsa össze $||\underline{x}||$ és a térvektorok hosszának tulajdonságait!

10*. Bizonyítsuk be, hogy tetszőleges $\mathbf{A}$ mátrixra igaz, hogy $\rho(\mathbf{A}^* \mathbf{A}) = \rho(\mathbf{A})$.