Kombinatorika és gráfelmélet II

ZH, 2024. november 14. 8.15-9.45, H 601.

Javítókulcs

Az útmutató mintamegoldásokat tartalmaz. A pontszámokat tájékoztató jelleggel állapítottuk meg, az értékelés egységesítése céljából. Egy pontszám előtt szereplő állítás kimondása, tétel felidézése nem jelenti automatikusan az adott pontszám megszerzését. Az adott részpontszám megítélésének az a feltétele, hogy a megoldáshoz vezető gondolatmenet megfelelő részének végiggondolása világosan kiderüljön a dolgozatból. Ha ez utóbbi kiderül, ám a kérdéses állítás, tétel, definíció nincs rendesen kimondva, akkor megfelelő részpontszám jár. Természetesen az ismertetettektől eltérő de helyes megoldásokért teljes pontszámok, részmegoldásokért pedig az útmutatóbeli pontozás intelligens közelítésével meghatározott arányos részpontszámok járnak. Számolási hibáért általában (hibánként) 1 pontot vonunk le.

1. G, H és F síkbarajzolt egyszerű gráfok, bármely kettő egymás duálisa. G-nek 10 csúcsa van. Hány éle van?

Legyen G-nek $n = 10$ csúcsa, e éle, t tartománya. Mivel H duálisa G és F is, G és F izomorfak, hiszen egy síkbarajzolt gráf duálisa egyértelmű. 3 pont

Viszont G és F is egymás duálisai, közben izomorfak, tehát G önmagának a duálisa. 3 pont

Ezért összefüggő és $n = t$. 3 pont

Az Euler formula alapján $2 = n - e + t = 20 - e$, vagyis $e = 18$. 1 pont

2. Egy hagyományos 8×8-as sakktáblán van néhány figura. Ezek felelnek meg a G gráf csúcsainak. Két csúcs össze van kötve akkor és csak akkor, ha a megfelelő két figura azonos színen áll és azonos sorban. Bizonyítsuk be, hogy G perfekt.

Beoszthatjuk a figurákat, illetve csúcsokat 16 osztályba aszerint, hogy fehér vagy fekete mezőn állnak és hányadik sorban. Az egy osztályba tartozó csúcsok teljes gráfot alkotnak, a különböző osztályba tartozók nincsenek összekötve. 5 pont

Tehát a gráfunk teljes gráfok diszjunkt uniója. A teljes gráfok perfektek, és két perfekt gráf diszjunkt uniója is perfekt. Ebből következik, hogy G perfekt. 5 pont

3. A G 101 csúcsú graf egy 99 hosszú (100 csúcsú) út és még egy csúcs, ami az út minden pontjával össze van kötve. Határozzuk meg $ch(G)$ értékét.

Legyenek az út csúcsai $v_1, v_2, \dots, v_{100}$, az extra csúcs u. Mivel G tartalmaz háromszöget (pl uv_1v_2) ezért $ch(G) \geq 3$. 3 pont

Most tegyük fel, hogy minden csúcshoz tartozik egy 3 elemű színlista. Színezzük ki először u-t. Ezután töröljük u színét a $v_1, v_2, \dots, v_{100}$ listáiról (ha egyáltalán rajta van). 4 pont

Most minden v_i listája legalább 2 hosszú, ezekről pedig könnyen ki tudjuk színezni a $v_1, v_2, \dots, v_{100}$ pontokat, ebben a sorrendben. 3 pont

4. Bizonyítsuk be, hogy tetszőleges $k, l > 0$ egész számokhoz létezik egy $N = N(k, l)$ a következő tulajdonsággal.

Akárhogy színezzük ki az $1, 2, \dots, N$ számokat k színnel, lesz egyszínű a, b, c, amelyekre $a + b = c$ és $a, b, c \geq l$.

1. megoldás. A Schur tétel szerint létezik $N(k)$ azzal a tulajdonsággal, hogy akárhogy színezzük ki az $1, 2, \dots, N(k)$ számokat k színnel, lesz egyszínű a, b, c, amelyekre $a + b = c$. Belátjuk, hogy $N(k, l) \leq lN(k)$. Színezzük ki az $1, 2, \dots, lN(k)$ számokat k színnel. Nevezzük ezt az *eredeti* színezésnek. Tekintsük csak az l-lel osztható számokat. 4 pont

Ebből definiálunk egy *második* színezést, az $1, 2, \dots, N(k)$ számokon k színnel. Legyen i színe ugyanaz, ami li színe az eredeti színezésben. A Schur tétel szerint lesz egyszínű a', b', c', $1 \leq a', b', c' \leq N(k)$, amelyekre $a' + b' = c'$. 4 pont

Csakhogy ekkor az eredeti színezésben, az $a = la'$, $b = lb'$, $c = lc'$ számok is egyszínűek és $a + b = c$. És nyilván $a, b, c \geq l$. 2 pont

2. megoldás. A Schur tétel szerint létezik $N(k)$ azzal a tulajdonsággal, hogy akárhogy színezzük ki az $1, 2, \ldots, N(k)$ számokat k színnel, lesz egyszínű a, b, c, amelyekre $a + b = c$. Belátjuk, hogy $N(k, l) \leq N(lk)$. Színezzük ki az $1, 2, \ldots, N(lk)$ számokat k színnel. Vegyünk l új színt és színezzük át az $1, 2, \ldots, l$ számokat, különböző színűre. 4 pont

A Schur tétel szerint lesz egyszínű a, b, c, $1 \leq a, b, c \leq N(lk)$, amelyekre $a + b = c$. De ekkor $a, b, c \geq l$, hiszen a kisebb számok színe csak egyszer fordul elő. 4 pont

Ezért az a, b, c számok az eredeti színezésben is egyszínűek voltak, ezzel beláttuk az állítást. 2 pont

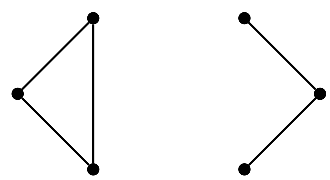
3. megoldás. Legyen N egy elegendően nagy szám és színezzük ki az $1, 2, \ldots, N$ számokat k színnel (eredeti színezés). Ebből definiáljuk a K_N teljes gráf egy élszínezését k színnel. A $v_i v_j$ él színe legyen $|i - j|$ színe az eredeti színezésben. 3 pont

Most vegyünk egy tetszőleges részsorozatot, $v_{a_1}, v_{a_2}, \ldots v_{a_R}$, ahol $a_{i+1} > a_i + l$ minden i-re és

$$R = R(\underbrace{3, 3, \ldots, 3}_{k}).$$

4 pont

Ebben, a Ramsey szám definíciója alapján találhatunk egy egyszínű háromszöget, legyen ez $v_x, v_y, v_z, x < y < z$. Viszont ekkor az eredeti színezésben az $a = y - x$, $b = z - y$ és $c = z - x$ számok egyszínűek, $a + b = c$ és $a, b, c > l$. 3 pont



5. Legyen G az ábrán látható 6 csúcsú gráf. Határozzuk meg $ex(G, 100)$ értékét.

Tekintsük a $K_{50,50}$ teljes páros gráfot, ebben meg háromszög sincs, pláne G, 2500 éle van, tehát $ex(G, 100) \geq 2500$. 3 pont

Most tekintsünk egy 100 csúcsú, 2501 élű H gráfot. Ebben a Mantel tétel szerint már van háromszög. 2 pont

Hagyjuk el a háromszög három csúcsát. Kapunk egy 97 csúcsú H' gráfot. Mivel legfeljebb $3 \cdot 99 - 3 = 294$ él illeszkedhetett az elhagyott pontokra, H'-nek legalább 2207 éle van. 3 pont

De akkor van olyan csúcsa, amelynek a foka legalább 2. Ennél a csúcsnál tudunk venni egy 2 hosszú utat. Ez és az elhagyott háromszög együtt éppen egy G-vel izomorf gráf. Tehát $ex(G, 100) < 2501$, vagyis $ex(G, 100) = 2500$. 2 pont

6. $\mathcal{F} \subseteq 2^{[n]}$, $n \geq 3$. Tudjuk, hogy nincs három különböző halmaz, $A, B, C \in \mathcal{F}$ amelyekre $A, B \subset C$.

És olyan három különböző halmaz, $A, B, C \in \mathcal{F}$ sincs, amelyekre $A \subset B, C$. Bizonyítsuk be, hogy

$$|\mathcal{F}| \leq 2\binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor}.$$

1. megoldás. Legyen

$$\mathcal{F}_1 = \{A \in \mathcal{F} \mid \text{nincs } B \in \mathcal{F}, B \supset A\},$$
$$\mathcal{F}_2 = \{A \in \mathcal{F} \mid \text{nincs } B \in \mathcal{F}, B \subset A\}.$$

3 pont

Ha lenne $A \in \mathcal{F}$ amelyre $A \notin \mathcal{F}_1$ és $A \notin \mathcal{F}_2$, akkor lennének B, C halmazok, amelyekre $B \supset A \supset C$, ami ellentmond a feltételeknek. Tehát $\mathcal{F} = \mathcal{F}_1 \cup \mathcal{F}_2$. 2 pont

Ha lenne $A, B \in \mathcal{F}_1$ amelyekre $B \supset A$, akkor A nem tartozhatna $\mathcal{F}_1$-hez. Hasonlóan, ha lenne $A, B \in \mathcal{F}_2$ amelyekre $B \subset A$, akkor A nem tartozhatna $\mathcal{F}_2$-höz. Tehát $\mathcal{F}_1$ és $\mathcal{F}_2$ Sperner rendszerek. 3 pont

A Sperner tétel szerint

$$|\mathcal{F}_1|, |\mathcal{F}_2| \leq \binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor}.$$

Tehát

$$|\mathcal{F}| \leq 2\binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor}.$$

2 pont

2. megoldás. A Sperner tétel (órán tanult) bizonyítását használjuk, minimális változtatással. Legyen f_k az $\mathcal{F}$-beli k elemű halmazok száma. Vegyük az összes $L_0 \subset L_1 \subset \cdots \subset L_n$ felszálló láncot ($L_i \subseteq [n], |L_i| = i$). Ilyenből összesen $n!$ darab van. 3 pont

A feltételek szerint minden felszálló láncban maximum két halmaz tartozhat $\mathcal{F}$-hez (itt a változtatás!). 4 pont

Viszont egy k elemű halmazt pontosan $k!(n-k)!$-szor találunk meg. 3 pont

Tehát

$$2n! \geq \sum_{k=0}^{n} f_k k!(n-k)!$$

vagyis

$$2 \geq \sum_{k=0}^{n} \frac{f_k}{\binom{n}{k}} \geq \sum_{k=0}^{n} \frac{f_k}{\binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor}}$$

ezért

$$|\mathcal{F}| \leq 2\binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor}.$$

3 pont