Kombinatorika és gráfelmélet 2.

8. gyakorlat, 2024. október 24

Turán

Tetszőleges H gráfra $ex(n, H)$ jelöli az n csúcsú, H-t részgráfként nem tartalmazó gráfok maximális élszámát, $Ex(n, H)$ pedig az n csúcsú, H-t részgráfként nem tartalmazó, $ex(n, H)$ élű gráfok halmazát (izomorfia erejéig).

Legyen $n, r \geq 1$. Az n csúcsú, r osztályú $T(n, r)$ **Turán gráfnak** n csúcsa van, r osztályba osztva a lehető legegyenletesebben: ha $n = ar + b$, $r > b \geq 0$, akkor b osztályban $\lceil n/r \rceil$ csúcs van, $r - b$ osztályban pedig $\lfloor n/r \rfloor$ darab. Bármely két, különböző osztályhoz tartozó csúcs össze van kötve, az azonos osztályban levők nem.

Tetszőleges G gráfra legyen $|E(G)|$ G éleinek a száma.

Turán tétel (1941). $ex(n, K_{r+1}) = |E(T(n, r))|$. Ha pedig G egy n csúcsú gráf ami nem tartalmaz K_{r+1}-et részgráfként és $|E(G)| = |E(T(n, r))|$, akkor G izomorf a $T(n, r)$ Turán gráffal, azaz $Ex(n, K_{r+1}) = T(n, r)$.

Erdős, Stone, Simonovits tétel (1946...).

$$\lim_{n\to\infty} \frac{ex(n, H)}{\binom{n}{2}} = 1 - \frac{1}{\chi(H) - 1}.$$

Erdős, Kővári, Sós, Turán tétel (1954). Legyen $r \geq s \geq 2$. Egy n csúcsú gráfnak, amely nem tartalmaz $K_{r,s}$–t részgráfként legfeljebb $c_{r,s} n^{2-1/s}$ éle van, valamilyen $c_{r,s}$ konstansra.

1. Legfeljebb hány éle lehet egy n pontú gráfnak, ha nincsen benne
   - kör?
   - páratlan kör? (páros lehet)
   - páros kör? (páratlan lehet)
   - 2 élből álló út?
   - sem 3 élből álló út, sem kör?
   - feszítőfa?

2. Egy 90 fős társaságból bizonyos párok leveleznek egymással. Akárhogyan választunk ki közülük tíz embert, ezek között mindig van legalább kettő, akik leveleznek egymással. Bizonyítsuk be, hogy a levelező párok száma legalább 405.

3. Igazoljuk, hogy az n-csúcsú, m-osztályú $T_{n,m}$ Turán-gráf pontosan akkor nem tartalmaz Hamilton-kört, ha $m = 2$ és n páratlan.

4. Legyenek $v_1, v_2, \ldots, v_n$ síkbeli vektorok, $|v_i| \geq 1$. Legalább hány párra lesz $|v_i + v_j| \geq 1$?

5. Legkevesebb hány csúcsa lehet egy háromszögmentes, egyszerű G gráfnak, ha $|E(G)| \geq 2|E(K_k)|$?

6. Adott a síkon n, nem feltétlenül különböző pont. Legfeljebb mennyi lehet az ezek közül kiválasztható egységnyi távolságra levő pontpárok száma?

7. Mutassuk meg, hogy sík n különböző pontja és n különböző egyenese között legfeljebb $c \cdot n^{\frac{3}{2}}$ illeszkedés lehet, ahol c alkalmas konstans. (Illeszkedés: egy (pont, egyenes) pár, ahol a pont illeszkedik az egyenesre.)

8. Mutassuk meg, hogy sík n különböző pontja legfeljebb $c \cdot n^{\frac{3}{2}}$ egységtávolságot határozhat meg, ahol c alkalmas konstans.

9. Legfeljebb hány éle lehet egy n csúcsú gráfnak, ha élei kiszínezhetők úgy két színnel, hogy ne keletkezzen egyszínű háromszög.

10. Egy n tagú társaságban eredetileg senki nem ismer senkit. Minimálisan hány bemutatással (egy bemutatás mindig pontosan két ember egymásnak való bemutatását jelenti) érhetjük el, hogy teljesüljenek a következő feltételek: 1. Bármely három ember között van kettő, akik ismerik egymást (tehát be lettek mutatva); 2. Bárki bárkinek (olyannak is, akit nem ismer) küldhet üzenetet úgy, hogy az üzenetet egymást ismerő (tehát egymásnak bemutatott) emberek adják tovább egymásnak, s az végül célba jut.

11. Egy 49 csúcsú gráfnak 1030 éle van. Mutassuk meg, hogy ekkor a kromatikus száma legalább 8, és hogy pontosan 8 is lehet.

12. Egy n tagú társaságból bármely k ember között van 2 aki kezet fogott. Legalább hány kézfogás történt?

13. Legyen H egy 5 csúcsú gráf, amely egy él és egy háromszög diszjunkt uniója. Határozzuk meg $ex(n, H)$ értékét. (Legyen $n \geq 100$.)

Házi feladat

1. a. Egy G gráfnak n csúcsa van, és minden csúcs fokszáma legalább 100. Bizonyítsuk be, hogy G tartalmaz 100 hosszú (100 csúcsú) utat!

   b. Egy G gráfnak n csúcsa és e éle van, $e > 100n$. Bizonyítsuk be, hogy G tartalmaz 100 hosszú (100 csúcsú) utat!

2. Mutassunk minden n-re olyan n csúcsú és $e > 40n - 100000$ élű gráfot, amelyben nincs 100 hosszú (100 csúcsú) út!

3. Legyen H egy 4 csúcsú gráf, amely két független élből áll. Határozzuk meg $ex(n, H)$ értékét minden n-re.