Kombinatorika és gráfelmélet 2.

1. gyakorlat, 2024. szeptember 3.

Perfekt gráfok

Tudnivalók

$\omega(G)$: klikkszám, legnagyobb teljes részgráf mérete.
$\chi(G)$: kromatikus szám, G (jó) színezéséhez szükséges színek száma.

G gráf perfekt, ha minden feszített G' részgráfjára (magát G-t is bleértve) $\chi(G') = \omega(G')$.

Intervallumgráf: csúcsok megfelelnek intervallumoknak egy egyenesen, két csúcs össze van kötve akkor és csak akkor, ha a megfelelő intervallumok metszik egymást.

Páros gráfok, intervallumgráfok, ezek komplementerei, páros gráfok élgráfjai perfektek.

Gyenge Perfekt Gráf Tétel (Lovász 72): G perfekt akkor és csak akkor, ha $\overline{G}$ perfekt.

Erős Perfekt Gráf Tétel (Chudnovsky, Roberts, Seymour, Thomas, 2002): G perfekt akkor és csak akkor, ha nem tartalmaz feszített részgráfként egy legalább 5 hosszú páratlan kört illetve komplementerét.

1. (Shift gráf) Legyen $m > 1$. Az S_m shift gráf csúcsai legyenek az (i, j) számpárok, ahol $1 \leq i < j \leq m$. (Elképzelhetjük (i, j)-t egy intervallumnak is.) Két csúcs, mondjuk (i, j) és (i', j') akkor és csak akkor vannak összekötve, ha $i = j'$ vagy $j = i'$. Vagyis ha az egyik intervallum ott végződik, ahol a másik kezdődik.

   a. Bizonyítsuk be, hogy S_m nem tartalmaz háromszöget. b. Bizonyítsuk be, hogy $\chi(S_m) \geq \log_2 m$.

2. Bizonyítsuk be, hogy a páros gráfok komplementerei perfektek.

3. Bizonyítsuk be, hogy az intervallumgráfok komplementerei perfektek.

4. a. Mutassunk olyan perfekt gráfot, ami nem intervallumgráf, de intervallumgráf komplementere. b. Mutassunk olyan perfekt gráfot, ami nem intervallumgráf komplementere, de intervallumgráf. c. Mutassunk olyan perfekt gráfot, ami nem intervallumgráf komplementere, és nem is intervallumgráf. d. Mutassunk olyan perfekt gráfot, ami intervallumgráf komplementere, és egyben intervallumgráf is.

5. A G gráfot *ívgráfnak* hívjuk, ha a csúcsai megfelelnek intervallumoknak (íveknek) egy körön, két csúcs össze van kötve, ha a megfelelő ívek metszik egymást.

   a. Mutassunk olyan ívgráfot, amely nem perfekt.

   b. Bizonyítsuk be, hogy ha G egy ívgráf, akkor $\chi(G) \leq 2\omega(G)$.

6. Legyenek a G_n gráf csúcsai az $1, 2, 3, \ldots, n$ számok, és legyen ij él, ha i és j relatív prímek. Határozzuk meg a $\chi(G)$ és $\omega(G)$ paramétereket. Perfekt-e a G_n gráf? (Tegyük fel, hogy n elég nagy.)

7. a. Legyen a H gráf a G és F perfekt gráfok diszjunkt uniója. Mutassuk meg, hogy H is perfekt gráf. b. Képezzuk a H' gráfot H-ból úgy, hogy minden F-beli csúcsot minden G-beli csúccsal összekötünk. Mutassuk meg, hogy H' is perfekt gráf.

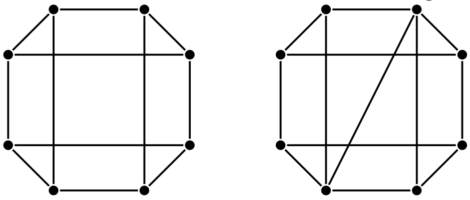
8. A G gráf csúcsai legyenek a 8×8-as sakktábla mezői, és két mező akkor legyen szomszédos G-ben, ha lóugrásnyira vannak egymástól. (A huszár mindig egy 3×2-es téglalap egyik csúcsából az átellenes csúcsába lép.) Mutassuk meg, hogy G perfekt. Mi a helyzet más figurákkal?

9. Bizonyítsuk be, hogy tetszőleges G gráf pontosan akkor perfekt, ha G minden G' feszített részgráfjának van olyan független ponthalmaza, ami G' minden maximális méretű klikkjét metszi.

10. Írjuk le azokat a G gráfokat, amelyeknek minden H részgráfjára $\omega(H) = \chi(H)$.

11. A G gráf *splitgráf*, ha csúcshalmaza előáll egy klikk és egy független ponthalmaz uniójaként. Mutassuk meg, hogy minden splitgráf perfekt.

12. Perfektek-e az alábbi ábrán látható gráfok?



13. Legyen adott egy T fa és ennek $F_1, \ldots, F_n$ részfái. Megadunk egy G gráfot az $\{F_1, \ldots, F_n\}$ halmazon: F_i és F_j $(i \neq j)$ akkor legyen szomszédos, ha van közös csúcsuk. Bizonyítsd be, hogy G perfekt!

14. (*)(Módosított shift gráf) Legyen $m > 1$. Az T_m módosított shift gráf csúcsai legyenek az (i, j, k) számhármasok, ahol $1 \leq i < j < k \leq m$. Két csúcs, mondjuk (i, j, k) és (i', j', k') akkor és csak akkor vannak összekötve, ha $i = j'$ és $j = k'$, illetve ha $i' = j$ és $j' = k$. Vagyis ha az egyik hármas első két eleme ugyanaz, mint a másik hármas második két eleme.

    a. Bizonyítsuk be, hogy T_m nem tartalmaz háromszöget. b. Bizonyítsuk be, hogy $\chi(T_m) \longrightarrow \infty$ ha $m \longrightarrow \infty$.

Házi feladat

Egy G gráf élgráfját $L(G)$-vel jelöljük.

1. Milyen n-re perfekt az $L(K_n)$ gráf?

2. Perfekt az $L(K_{n,n})$ gráf? És az $L(L(K_{n,n}))$ gráf? (tegyük fel, hogy $n > 2024$.)

3. a. Adjunk meg olyan 2025 csúcsú gráfot, amely nem perfekt, de minden valódi (vagyis kevesebb, mint 2025 csúcsú) feszített részgráfja perfekt.

b. Bizonyítsuk be, hogy nincs ilyen tulajdonságú 2024 csúcsú gráf.