

# Kombinatorika és gráfelmélet 1.

7. gyakorlat, 2025. március 28

*Páros gráfok, párosítások, Hall, Frobenius, König tételek.*

## Tudnivalók

$G(A, B, E)$  páros gráf, ha  $A$  és  $B$  a csúcsok halmaza,  $E$  az élek halmaza, és minden él  $A$  és  $B$  között fut. Legyen  $G$  egy tetszőleges gráf.

Egy gráf akkor és csak akkor páros, ha nem tartalmaz páratlan hosszú kört.

Egy  $e_1, e_2, \dots, e_k$  élhalmaz **független**, vagy **párosítás**, ha nincs közös végpontjuk.

Egy ponthalmaz **lefogó**, ha  $G$  minden élének legalább az egyik végpontját tartalmazza.

$\tau(G)$ : lefogó pontok minimális száma;

$\nu(G)$ : független élek maximális száma;

Minden  $G$  gráfra igaz, hogy  $\nu(G) \leq \tau(G)$ . (Mert a  $\nu$  darab független él lefogásához is kell már  $\nu$  darab pont.)

Tetszőleges  $X$  csúcshalmazra legyen  $N(X)$   $X$  szomszédainak a halmaza, vagyis azon csúcsok halmaza, amelyek legalább egy  $X$ -beli csúcscsal össze vannak kötve.

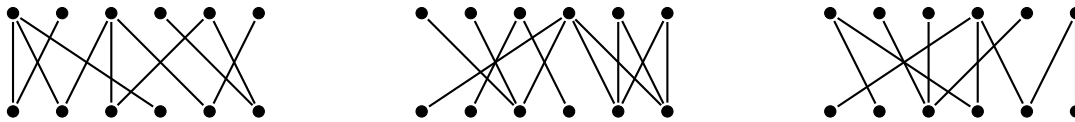
Legyen most  $G = G(A, B, E)$  páros gráf, vagyis  $A$  és  $B$  a csúcsok halmaza,  $E$  az élek halmaza, és minden él  $A$  és  $B$  között fut.

**Frobenius tétel:** Akkor és csak akkor van a  $G(A, B, E)$  páros gráfban teljes (minden csúcst párosító) párosítás, ha  $|A| = |B|$ , és minden  $X \subset A$ -ra  $|X| \leq |N(X)|$ .

**Hall tétel:** Akkor és csak akkor van a  $G(A, B, E)$  páros gráfban  $A$ -t lefedő párosítás, ha minden  $X \subset A$ -ra  $|X| \leq |N(X)|$ .

**König tétel:** (a) Ha  $G$  páros gráf, akkor  $\nu(G) = \tau(G)$ .

1. Határozzuk meg a maximális párosítás méretét az alábbi gráfokban.



2. Adott  $n$  fiú és  $n$  lány úgy, hogy minden fiúnak legfeljebb 1 rokona van a lányok között, és bármely lányhoz van olyan fiú, aki nem rokona. Bizonyítsuk be, hogy a fiúk és a lányok párokba rendezhetők úgy, hogy rokonok nem alkotnak párt.
3. Bizonyítsuk be, hogy ha a  $G$  páros gráf összefüggő és az  $A$  osztályában a fokszámok különbözőek, akkor  $G$ -nek van  $A$ -t fedő párosítása.
4. Egy kiránduláson  $n$  házaspár vesz részt, és közöttük kellene elosztani  $2n$  különböző csokoládét úgy, hogy mindenki egyet kapjon. Tudjuk, hogy minden résztvevő legalább  $n$  fajtát szeret a  $2n$ -féle csokoládé közül, és az is teljesül, hogy minden csokoládét szereti minden házaspárnak legalább az egyik tagja. Bizonyítsuk be, hogy ekkor kioszthatók úgy a csokoládék, hogy mindenki olyat kapjon, amit szeret.
5. A  $G$  irányított gráf minden csúcsából  $k$  él indul és  $k$  él érkezik. Igaz-e, hogy  $G$ -nek kiválaszthatók pontdiszjunkt irányított körei, melyek  $G$  minden csúcsán áthaladnak?
6. Igazoljuk, hogy minden reguláris páros gráfnak van teljes párosítása.
7. Bizonyítsuk be, hogy egy 2-reguláris, páros gráfban a különböző teljes párosítások száma mindig 2-nek valamilyen pozitív egész kitevős hatványa.
8. a. Bizonyítsuk be, hogy minden véges  $G$  gráfra  $2\nu(G) \geq \tau(G) \geq \nu(G)$  teljesül. b. Bizonyítsuk be, hogy tetszőleges  $2\nu \geq \tau \geq \nu$  számokhoz van olyan  $G$  gráf, amelyre  $\nu(G) = \nu$  és  $\tau(G) = \tau$ .
9. Egy táncmulatságon 25 lány és 25 fiú van jelen. E társaságban minden lány ismeretségben van legalább 13 fiúval és minden fiú legalább 13 lánnyal. Bizonyítsuk be, hogy páros táncra perdülhetnek egyszerre mind az 50-en úgy, hogy az egymással táncolók ismerik egymást!
10. Konstruáljunk olyan gráfot, amelynek pontosan  $k$  db különböző teljes párosítása van.
11. Igaz-e, hogy tetszőleges véges  $G$  gráf mindazon élei, amik  $G$  valamelyik teljes párosításában szerepelnek, páros gráfot alkotnak?

12. Valaki véletlenszerűen szétosztott egy pakli francia kártyát 13 darab 4 lapból álló csomagba. Bizonyítsuk be, hogy ekkor mindegyik csomagból kiválasztható egy lap úgy, hogy a kiválasztott lapok között mindegyik fajta figurából éppen egy legyen (vagyis egy darab 2-es, egy darab 3-as, stb., egy darab A). (A francia kártyában 13 fajta figura van: 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, J, Q, K, A. Minden figurából 4 darab van egy pakliban.)
13. Adott egy  $n \times n$ -es mátrix, amelynek minden sorában, és oszlopában pontosan  $k$  darab egyes van. Bizonyítsd be, hogy ekkor kiválasztható  $n$  darab egyes úgy, hogy minden sorból és oszlopból pontosan egy darab egyeset választottunk ki!
14. Legyen  $G$  egy olyan egyszerű gráf, amelynek 1000 csúcsa van és minden csúcs fokszáma legalább 6. Igazoljuk, hogy  $\nu(G) \geq 6$ . ( $\nu(G)$  a független élek maximális számát jelöli.)

### Házi feladat

1. Legyen  $G(A, B, E)$  páros gráf. Tudjuk, hogy minden  $X \subseteq A$  esetén  $|N(X)| \geq |X| - 1$ . Bizonyítsuk be, hogy  $\nu(G) \geq |A| - 1$ , vagyis  $G$  tartalmaz  $|A| - 1$  független élt.
2. Legyenek  $G$  csúcsai  $v_1, \dots, v_{12}$ ,  $v_i$  és  $v_j$  ( $i \neq j$ ) akkor és csak akkor vannak összekötve, ha  $ij$  osztható 6-tel. Határozzuk meg  $\nu(G)$  értékét (és bizonyítsuk be, hogy annyi).

## Nyakunkon a ZH!!!

### 1. Aláíráspótló ZH, 2019. május 24. 8.15-9.45, T 601/2

1. Hány olyan fa van a  $v_1, v_2, \dots, v_{100}$  csúcsokon, amelyben  $d_1 + d_2 + d_3 = 20$ ? ( $d_i$  a  $v_i$  csúcs fokszáma)
2. A  $G(V, E_1)$  gráfban van Euler kör. Az  $F(V, E_2)$  gráf pedig egy fa. Az  $E_1$  és  $E_2$  élhalmazok diszjunktak. Bizonyítsuk be, hogy a  $H(V, E_1 \cup E_2)$  gráfban nincs Euler kör.
3. Legyen  $p, q \geq 1$ . A  $K_{p,q}$  teljes páros gráf egyik osztályában  $p$ , a másik osztályában  $q$  csúcs van, és a két osztály között az összes  $(pq)$  él be van húzva. Határozzuk meg, hogy milyen  $(p, q)$ ,  $p, q \geq 1$  számpárookra van a  $K_{p,q}$  gráfban Hamilton út.
4. A  $K_{100}$  teljes gráf csúcsai  $v_1, v_2, \dots, v_{100}$ , a  $v_i v_j$ , ( $1 \leq i, j \leq 100$ ) él súlya  $c(i, j) = 2^{i+j}$ . Határozzuk meg az összes minimális összsúlyú feszítőfát.
5. A  $G(s, t, c)$  hálóztában a maximális  $st$  folyam nagysága 100. Ha minden él kapacitását megnöveljük 1-gyel, akkor a maximális  $st$  folyam nagysága 200-ra nő. Bizonyítsuk be, hogy a  $G(s, t, c)$  hálóztában van olyan él, amelynek a kapacitása legfeljebb 1.
6.  $G$  csúcsai  $v_{i,j,k}$ ,  $1 \leq i, j, k \leq 4$ . A  $v_{i,j,k}$  és  $v_{i',j',k'}$  csúcsok össze vannak kötve, akkor és csak akkor, ha  $|i - i'| + |j - j'| + |k - k'| = 1$ . Határozzuk meg  $G$  pontösszefüggőségi számát,  $\kappa(G)$ -t.