Kombinatorika és gráfelmélet 1.

3. gyakorlat, 2025. február 28.

Minimális súlyú feszítőfa, Kruskal tétel, mohó algoritmus, Euler körök, utak

Tudnivalók:

Adott egy G teljes gráf, minden e élen egy $s(s) > 0$ súllyal. Mohó algoritmus: rakjuk sorba az éleket súly szerint növekvő sorrendbe. Menjünk sorba az éleken, ebben a sorrendben, egy adott élt akkor veszünk be az épülő fába, ha az eddig bevett élekkel nem alkot kört.

Kruskal tétel: a mohó algoritmus eredménye egy minimális összsúlyú feszítőfa.

Euler kör (Euler körséta): olyan körséta, amely minden élt pontosan egyszer tartalmaz. Euler út (Euler séta): olyan séta, amely minden élt pontosan egyszer tartalmaz.

G-ben van Euler kör $\Leftrightarrow$ G izolált pontoktól eltekintve összefüggő és minden fokszám páros.

G-ben van Euler út $\Leftrightarrow$ G izolált pontoktól eltekintve összefüggő és minden fokszám páros, kivéve legfeljebb kettőt.

1. Adott r darab, egyenként k csúcsú pontdiszjunkt fa. Hányféleképpen egészíthető ki ez az r fa egyetlen $k \cdot r$ csúcsú fává? (A kiegészítés úgy értendő, hogy az r fa mindegyike részgráfja lesz a keletkező $k \cdot r$ csúcsú fának. A feszítőfák megkülönböztetésekor a gráf csúcsait címkézettnek tekintjük.)
2. Adjunk meg tetszőleges k-ra k darab nem izomorf fát, amelyeknek ugyanaz a fokszám sorozata.
3. Milyen k pozitív egészekre adható meg olyan 2000 élű és 2000 csúcsú összefüggő gráf, amire igaz a következő: G-ben a 2000 él közül adható egynek 2 egységnyi, 1999-nek 1 egységnyi súly úgy, hogy a G-ből kiválasztható különböző minimális súlyú feszítőfák száma éppen k. (A feszítőfák megkülönböztetésekor a gráf csúcsait címkézettnek tekintjük.)
4. Legyenek az G teljes gráf csúcsai a $v_1, v_2, \ldots, v_n$ pontok, és legyen a $v_i v_j$ él súlya $\max(i, j)$. Határozzuk meg a G gráf minimális súlyú feszítőfáinak számát.
5. Bizonyítsuk be, hogy az élsúlyozott G gráf $e = uv$ élére pontosan akkor igaz, hogy e a G minden minimális súlyú feszítőfájának éle, ha $V(G)$ felbontható két diszjunkt ponthalmaz uniójára úgy, hogy u és v különböző halmazokban legyenek, továbbá a két ponthalmaz között e az egyedüli legkisebb súlyú él.
6. Tegyük fel, hogy egy súlyozott élű gráfban pontosan két minimális súlyú feszítőfa van. Bizonyítsuk be, hogy ekkor ezek csak egy élben térnek el egymástól.
7. Ha egy súlyozott élű gráfban vannak egyforma súlyú élek, akkor elképzelhető, hogy a mohó algoritmus többféleképpen is lefuthat. Bizonyítsuk be, hogy *minden* minimális összsúlyú feszítőfa megkapható a mohó algoritmus megfelelő futtatásával.
8. Tegyük fel, hogy egy téglalapot véges sok téglalappal kiparkettáztunk. Minden kis téglalapnak legalább az egyik oldala egész hosszúságú. Igazoljuk, hogy a nagy téglalapnak is van egész hosszúságú oldala. (*)
9. Igazoljuk, hogy ha a G gráf minden fokszáma páros, akkor $E(G)$ előáll éldiszjunkt körök uniójaként.
10. Igazoljuk, hogy ha G összefüggő és minden fokszáma páros, akkor G-ből elhagyhatók G egy körének élei úgy, hogy a kapott gráf izolált pontoktól eltekintve összefüggő maradjon.
11. Bizonyítsuk be, hogy egy *irányított* gráfnak (amelynek nincs izolált pontja) akkor és csak akkor van irányított Euler köre, ha minden pont be–foka egyenlő a ki–fokával, és gráf, mint irányítatlan gráf, összefüggő.
12. Legyenek a G_n gráf pontjai az n hosszú $(0, 1)$ sorozatok. Két pont akkor legyen szomszédos, ha pontosan egy helyen térnek el egymástól (pl. az $n = 4$ esetben $(0, 0, 0, 1)$ és $(0, 1, 0, 1)$ szomszédosak). Van-e a G_n gráfnak Euler köre?
13. Mutassuk meg, hogy ha a G gráfnak van Euler köre, akkor G csúcsainak bármely részhalmazából páros sok él indul a komplementerébe.
14. Egy egyszerű G gráf csúcsait az $1, 2, \ldots, 100$ számok jelölik. Az i és j csúcsok között pontosan akkor vezet él G-ben, ha $|i - j| \leq 2$. Tartalmaz-e G Euler kört, illetve Euler utat?

15. Mutassuk meg, hogy ha a G gráfnak van Euler köre, akkor G élgráfjának, $L(G)$-nek is van Euler köre!

    (A G gráfhoz tartozó *élgráf* csúcsai G éleinek felelnek meg, és két $L(G)$-beli csúcs pontosan akkor szomszédos, ha a nekik megfelelő G-beli éleknek van közös végpontjuk.)

    Visszafele is igaz az állítás?

16. Van-e olyan egyszerű gráf, melynek van Euler köre, és

    a. páros számú pontja és páratlan számú éle van?

    b. páros számú pontja és páros számú éle van?

    c. páratlan számú pontja és páratlan számú éle van?

    d. páratlan számú pontja és páros számú éle van?

17. Mutassuk meg, hogy bármely összefüggő gráf élei bejárhatók úgy, hogy mindegyiken kétszer megyünk végig, éspedig mindkét irányban egyszer-egyszer.

18. A G gráfnak e és f két olyan éle, melyeknek van közös végpontjuk, továbbá G-ben létezik Euler-kör. Következik-e ebből, hogy G-ben olyan Euler-kör is van, melyben e és f egymást követik?

19. Melyek azok a gráfok amikben pontosan egy Euler-kör van? (Tehát egy él szomszédai az Euler-körön mindig ugyanazok.)

20. Az alábbi állítások közül melyik igaz?
    (a) Ha G egy körének éleit törölve a maradék G' gráfnak van Euler-köre, akkor G-nek is van.
    (b) Ha G összefüggő és egy körének éleit törölve a maradék G' gráfnak van Euler-köre, akkor G-nek is van.
    (c) Ha G-ben van Euler-kör és G valamely körének éleit töröljük, akkor a maradék G' gráfban is van.
    (d) Ha G összefüggő és egy körének éleit törölve a maradék G' gráfban van Euler-út, akkor G-ben is van.

21. Adott n város, bármely kettő között van repülőjárat, de csak az egyik irányban. Mutassuk meg, hogy van olyan város, melyből bármely másik elérhető legfeljebb egy átszállással.

22. Hogyan súlyozzuk egy n csúcsú teljes gráf éleit úgy, hogy a súlyok összege 1, és a minimális feszítőfa súlya a lehető legnagyobb?

    Mennyi az így kapott minimális feszítőfa súlya?

Házi feladat

1. Egy n csúcsú teljes gráf minden élének más a súlya. Bizonyítsuk be, hogy csak egy minimális összsúlyú feszítőfája van.

2. G egy 2000 csúcsú gráf, amelynek van Euler körsétája. Bizonyítsuk be, hogy a komplementerének nincs.