Otthonosan a prímek világában

Beszélgetés Pintz János akadémikussal

– A nap hány órájában forognak gondolataid a matematika körül?

– Ez változó. Mindennapjaim nagy részét a matematika tölti ki. Ha mást is csinálok, az agyam egyik fele mindig azokon a problémákon töpreng, amelyek éppen foglalkoztatnak. Ilyenkor nehezebben alszom el, nyugalmi állapotban újra előjönnek a gondolatok. Emlékszem, egyszer, régebben, reggel 9 órától másnap reggel 6-ig töprengtem egyfolytában.

Aztán ott voltak a Schweitzer-versenyek, melyeken tíz nehéz problémát tűznek ki egyetemi hallgatóknak. Tíz napot kapunk erre.

– Utánanéztem, a Schweitzer-versenyen már gimnazistaként elindultál, és dicséretet kaptál.

– Igen, hétfőn déli 12 órakor volt mindig a beadási határidő, egyszer az utolsó 54 órából 48-at fenn voltam, dolgoztam. Az utolsó éjszakán már egy percet sem aludtam. Nem tudom, mások hogyan voltak vele, én az első nyolc napon próbáltam megoldani a feladatokat. Amiket sikerült, azokat az utolsó két nap leírtam. Akkor jött a bökkenő: a leíráskor a 7–8 megoldottnak hitt feladatból 1–2 elromlott, úgy értve, hogy kiderült, valami hiányzik a megoldásból.

– A Schweitzer-verseny feladatainál a versenyzőnek gyakran bele kell tanulnia abba a témakörbe, ahonnan a feladat való.

– Teljesen igaz. Utána kellett nézni a könyvekben. Nagy szerepe volt annak, hogy ezalatt a tíz nap alatt elérjem azokat a könyveket, amelyek a feladat témaköréhez kapcsolódtak. Akkor még nem volt internet. Ma már nagyon sok matematikai fogalom, és a hozzá kapcsolódó alapvető tételek is gyorsan megtalálhatók a Wikipédián. Az 1940 óta megjelent összes matematikai cikk rövid összefoglalója megkereshető a Mathematical Reviews számítógépes adatbázisában. Rákereshetsz egyes szavakra, a cikk témájára, így nagyon sok eredményt megtalálhat az ember. Ma a Schweitzer-verseny feladatait kitűző matematikusoknak erre is gondolniuk kell. Nehogy könnyen elérhető legyen a probléma megoldásának ötlete valamelyik cikkben.

Pintz János

– Nehezen fér a fejembe, miként érhettél el gimnazistaként említésre méltó eredményt a végzős matematikushallgatók legjobbjait is próbára tevő Schweitzer-versenyen.

– A Fazekas speciális matematika tagozatos osztályába jártam 1964 és 1969 között, ott heti 10 órában tanítottak matematikát, magas színvonalon. Az első, 1962-ben itt induló matematika tagozatos osztályból Lovász László és Pelikán József is nyert díjat a Schweitzer-versenyen, már gimnazistaként is. A Schweitzer-verseny tíz napjára, gimnazista indulóként szabadságot kaptunk. Hárman voltunk ilyenek az osztályunkból. Mivel éjjel-nappal dolgoztunk a feladatokon, nyilván még inkább hátrányba kerültünk volna, ha közben napi 6 órát a középiskolában kellett volna töltenünk.

– A Schweitzer-versenyen csak magatokra számíthattatok.

– Ezen a versenyen, ellentétben a kutatásokkal, nem dolgozhatnak együtt az emberek, nem lehet közös megoldást beadni, nem kérhetünk tanácsot kész kutatóktól. Ellenőrizni ezt tulajdonképpen nem lehet, bízni kell abban, hogy mind a két oldal, a tehetséges diákok és az oktatóik is betartják a szabályokat. A pénzdíjak sem olyanok, amik megingatnának a tisztességben. Állíthatom, hogy a Schweitzer-versenyen való részvétel, a matematikával eltöltött koncentrált időszak felér egy egyetemi félévvel. A Schweitzer-feladatok a könnyebb publikációval azonos szinten állnak. Volt olyan Schweitzer-feladat, aminek az általánosítását később leírtam egy cikkben.

– Mondhatjuk, bevezető a kutatásba, annak előszobája?

– Pontosan így van. Előnyt jelent, hogy itt olyan feladatokat kapunk, amiket valaki egyszer már megcsinált. Nincs meg az a veszély, mint a kutatásban, ahol hónapokat, éveket tölthetünk el egy problémával való eredménytelen birkózással, amiről azt sem tudjuk, hogy megoldható-e.

A Schweitzer-versenyen nagy szerepe van annak, hogy a matematikai tehetségünk közelítsen az univerzálishoz. A különböző részterületek, az algebra, az analízis, a geometria… más-más gondolkozást kívánnak. Ritkaság, hogy valakinek a matematika több ágához is tehetsége legyen. Ma már annyira specializálódott a kutatás, hogy csekély kivételtől eltekintve a matematikus legfeljebb 5–10 százalékát képes áttekinteni a kutatási eredmények összességének. A részterületek speciálisabb tehetséget, gondolkodásmódot igényelnek. Ami persze nem zárja ki, hogy a legjobbak a matematika több területén is otthonosan mozogjanak. Mint például Terence Tao…

– Aki a világ egyik legjobb matematikusa.

– Azt hiszem, itt erősebben is fogalmazhatunk. Egyik legjobbja, az biztos, de nagy biztonsággal állítható, hogy a legjobb. Tao abban is kiváló, hogy sokszor az egyik terület ötleteit, gondolkodásmódját alkalmazza más körben, ezzel szerez előnyt a riválisok előtt.

– Lovász László is ilyen.

– Igen, Lovász is univerzális matematikus. Erdős Pálban és néhány kortársában is megvolt az univerzalitás. Igaz, akkoriban egy szűkebb összmatematikát kellett áttekinteni.

– Ide kívánkozik, amit T. Sós Vera mondott Erdős Pálról, Rényi Alfrédról és Turán Pálról: „Hármukat igen szoros baráti szálak fűzték össze. Különböző életutakat jártak be, eltérő személyiségek, más-más matematikusi karakterek voltak. Munkásságuk mégis hasonlított egy lényegi, közös vonásban: sokféle és sokszínű matematikát műveltek. Ma már ez a hozzáállás egyre elképzelhetetlenebb."

– Nagyon jó ez a megfogalmazás. Ma már egyszerűen elképzelhetetlen erre törekedni. Gondold meg, a Mathematical Reviews, amikor még nem volt elektronikus kiadása, minden évben, kötetben kiadta a valamirevaló matematikai cikkek 80–90 százalékának referátumait. Ezek 8–10 sorosak voltak, nem mentek bele a bizonyítás részleteibe, csak a cikk fő eredményét közölték. Egy oldalra 5–6 cikk fért. 30 év múlva már havonta kiadtak ilyen köteteket, hiszen időközben a kutatók létszáma, s vele együtt az eredményeiknek és cikkeiknek a száma is exponenciálisan növekedett. 1940-ben még át lehetett tekinteni, mi történik a matematika világában, ma már ez elképzelhetetlen, kísérletet sem tesz rá az ember.

– Te hogyan vagy ezzel? Mennyi időt fordítasz arra, hogy áttekintsd szakterületed, a prímszámelmélet fejleményeit?

– Ha a szakterületemen lényeges előrehaladás történik, arról már előbb értesülök, egy-egy konferencián, lektorálásra kapott cikkekből...

A Mathematical Reviews-nál gyorsabb forrás az *arxiv.org/archive/math* az interneten, ahová a matematikusok jelentős része, néhány éve már én is, ha elér egy eredményt, annak publikálása előtt felteszi ebbe a szabad hozzáférésű gyűjteménybe. Egy napon belül on-line megjelenik, és az interneten bárki elérheti, olvashatja. A számelméletből naponta 10–12 cikk jelenik meg. Az arxiv-nak prioritást biztosító szerepe is van. 20–25 éve a cikk lektora esetleg nem is értesült arról, hogy azt az eredményt egy hónappal korábban már másik folyóirathoz benyújtották.

– A Schweitzer-versenyt jól kiveséztük. Beszéljünk most Pintz Jánosról. Milyen emlékeid vannak gyermekkorodból a matematikáról?

– Nekem gyermekkoromtól könnyen ment a matematika. A két évvel idősebb bátyám feladatait is gyorsabban megoldottam. Szerettem a számolgatást, a gondolkodtató feladatokat. Általános iskolás koromból emlékszem egy kis füzetre, amit Pataki Ferenc, a híres fejszámoló művész írt. Ebben gondolkodtató feladatok voltak, logikai feladványok.

A Horváth Mihály téri Gyakorló Általános Iskolába jártam. Amikor a Fazekas Gimnázium hozzánk költözött, a két intézmény 12 osztályos iskolává egyesült. Így sima átmenettel kerültem a Fazekas matematika tagozatos osztályába, onnan pedig a matematika versenyeken elért eredményeim alapján felvettek az Eötvös Loránd Tudományegyetem matematikus szakára.

– A Fazekasban ki volt a matematikatanárod?

– Reményi Gusztáv. Az órákon kívül az iskolában matematika szakköreink is voltak. Egyetemistaként visszajöttek hozzánk szakkört tartani a korábban itt végzettek közül Lovász László, Vesztergombi Katalin, Pelikán József. Szakköreik már kissé egyetemi előadásra hasonlítottak, a matematikának nemcsak a lezárt területeiről beszéltek. Legtöbbet azonban mégis a Reiman István által tartott központi diákolimpiai felkészítő szakkörökön tanultam. Kéthetente, szombat délutánonként voltak ezek a feladatmegoldó foglalkozások.

Reiman István könyv alakban is megjelentette a versenyfeladatok gyűjteményét, ezen kívül voltak oroszból lefordított hasonló összeállítások. A diákolimpiára való felkészülést ezen kívül a sok matematikaverseny is segítette.

Már elsős gimnazista koromtól jártam Reiman István szakköreire. Azután a második, harmadik és a negyedik év végén beválogattak a 8 fős olimpiai csapatba.

– Harmadikosként érted el legjobb eredményedet a Nemzetközi Matematikai Diákolimpián. Aranyérmes lettél.

– Igen, akkor sikerült nekem legjobban a verseny.

Az olimpiai csapat kiválasztásában döntő szerepe volt Reiman Istvánnak. Ő megfigyelhetett minket az edzés jellegű felkészítő szakkörökön, ezen kívül még számos visszajelzése lehetett rólunk: az Országos Középiskolai Tanulmányi Versenyek (OKTV), a Középiskolai Matematikai és Fizikai Lapok (KöMaL) megoldóinak sorrendje, a Kürschák-verseny. Ezeken kívül volt még a televízió Ki miben tudós? versenye is.

– Milyen eredményeid voltak ezeken a versenyeken?

– A KöMaL-ban első vagy második voltam, évenként változóan. Az OKTV-n minden évben benne voltam az első kettő-háromban. Harmadikos gimnazistaként megnyertem a Ki miben tudós? nem a tévé előtt zajló versenyét, negyedikesként pedig azt a vetélkedőt is, amit már közvetítettek. A Kürschák-versenyen is dobogós lettem. Otthon is szívesen töprengtem a versenyfeladatokon, kedvemre való volt, sok időt töltöttem velük.

– Az egyetemen milyen volt az évfolyamotok? Kikkel jártál együtt?

– Érdekes módon, a matematikában tehetséges hallgatótársaim közül Mérő László, Vargha András és Geier János is pszichológusok, egyetemi oktatók lettek. Évfolyamunk többsége számítástechnikai pályára ment, a fejlődés korai szakasza ott több lehetőséget kínált.

– Egyetemi tanáraid közül kit említenél meg?

– Az idősebb generációból Turán Pál volt a legkitűnőbb, meghatározó személyiség. Voltak más, kiváló matematikus professzoraink is, például Rényi Alfréd vagy Hajnal András. Mire magasabb évfolyamosként hozzájuk kerültünk volna, Rényi addigra fiatalon meghalt, s bár Hajnal tanított minket halmazelméletre, de addigra elköteleztem magam a számelméletnek.

Turán Pál mellett nagy hatással voltak rám a felsőbb évfolyamokon az egyetemi feladatmegoldó szemináriumok, melyeket Pósa Lajos és Laczkovich Miklós vezetett. A felvetett problémák nem szorítkoztak speciális területre, az előadásokhoz tartozó gyakorlatokkal szemben inkább az otthoni munkára irányultak. A következő alkalommal azután megbeszéltük, ki mire jutott a feladattal.

– Turán Pál mitől volt más, mint a többi előadó?

– Nézd, az egyetem első két évében többnyire XIX. századi matematikát tanultunk. Kivételt jelentettek Turán Pál előadásai. Ő nemcsak kiváló matematikus, hanem jó előadó is volt. Bár a számelmélet klasszikus területe a matematikának, ő azonban ügyesen beleszőtte előadásaiba az utolsó évtizedben elért eredményeket, sőt egy-két megoldatlan problémát is mondott. Szerencsésnek mondhatom magam, hogy pályakezdő fiatalként kerülhettem a közelébe.

Sokan azt hiszik, hogy a matematika lezárt tudomány. Rokoni vagy laikus baráti társaságban gyakran felteszik nekem a kérdést: „Van még mit kutatni a matematikában?" Ilyenkor elmondom nekik a Goldbach-sejtést, az ikerprím-sejtést, ezek egyszerűen megfogalmazhatók, mégis máig megoldatlanok. Hozzáteszem, ez persze nem azt jelenti, hogy mindenki ül, és ezen gondolkozik, azután negyven év múlva nyugdíjba megy, mondván: nekem sem sikerült megoldanom. A kutatók erőfeszítései újabb és újabb lépésekkel közelítenek a végső megoldáshoz, közben hasznos eredményeket, módszereket szolgáltatnak.

– A diplomaszerzés után 1974–1977 között az ELTE Algebra és Számelmélet Tanszékén dolgoztál. Hogyan kerültél oda?

– Turán Pál hívott. Ő 1975-ben átment a Matematikai Kutatóintézetbe. Szóltam neki, hogy szívesen vele tartanék. Akkorra már elég sok kutatni való témám és publikációra előkészített eredményem volt. A kutatóintézetben azonban nem volt üres hely, új embert csak akkor tudtak felvenni, ha onnan időnként egy-egy ember disszidált. Így aztán csak Turán halála után kerültem a kutatóintézetbe.

– Erdős Pali bácsi mondta az egyik interjúban, hogy Turán élete végéig dolgozott a nagy könyvén, a „piramisán", mely az általa kidolgozott hatványösszeg módszer összegezése lett volna. Ennek befejezése tanítványaira, Halász Gáborra és Pintz Jánosra maradt. Mit jelentett számodra ez a munka?

– Majdhogynem véletlenül kerültem ebbe. Turán Pált 1975-ben meghívták Szegedre, hogy tartson előadást a hatványösszeg módszeréről. Úgy tervezte, hogy majd a módszerének számelméleti alkalmazásairól beszél. Tudta, hogy én ebbe a részterületbe dolgoztam be magam, az analitikus számelméletben a prímszámok eloszlásával kapcsolatos kérdéseket kutattam. A betegsége miatt nem tudott elutazni Szegedre, de megírta az előadását, és megkért, adjam elő helyette. Az ilyen összintézeti előadáson általában nem adnak részletes bizonyítást, én azonban előtte elolvastam Turán előadásának alapját képező cikkeit. Észrevettem, hogy mindkét dolgozatban javítani lehet valamit az eredményen. Így keveredtem bele a hatványösszeg módszer számelméleti alkalmazásaiba. Hosszabb időszakra ez lett a fő kutatási területem, a következő 5–6 évben erről írtam kb. 30 cikket. A kutatás egyik fő iránya a prímszámok körében a szabályszerűséget, az egyenletes viselkedést igyekszik kimutatni, ebben dolgoznak, publikálnak a legtöbben. A híres Riemann-sejtés is ilyen irányban halad, az egyenletességet kimutatandó.

A Turán-módszert kicsit kiterjesztve én a másik irányt választottam, a prímszámok eloszlásának szabálytalanságait kutattam. Később sikerült más módszereket is találnom a szabálytalanságok kimutatására. Ami nem feltétlenül a konkrét prímszámelméleti probléma teljes megoldását jelenti, hanem az addigi eredményekhez képest bizonyos előrelépést.

– A könyvre visszatérve, Turán Pál halála után T. Sós Vera kért meg a befejezésére?

– Igen, Vera szólt Halász Gábornak és nekem. Turánnak nem sok tanítványa volt. Mi ketten foglalkoztunk analitikus számelmélettel. Megkönnyítette a könyv befejezését, hogy a Turán által tervezett 56 fejezetből 33 már készen volt. Turán pontos tartalomjegyzéket hagyott hátra, megadta a hiányzó fejezetek címeit. Beazonosíthattuk, hogy ezek milyen korábban kidolgozott tételeire vonatkoznak. A könyv nyersanyaga tehát megvolt, két-háromszáz oldalnyi publikációban. Ezeket kellett átnézni, csiszolgatni, ahol lehetett egyszerűsíteni, bevezetőt írni a fejezetekhez… Halász Gáborral téma szerint elosztottuk egymás között a hiányzó fejezeteket.

– Meddig dolgoztál a könyvön?

– Közel egy évig. Olyan volt ez, mint egy kutatómunka, nem éreztem elvesztett időnek. A könyv végső alakja nagymértékben hasonlít ahhoz, ahogyan Turán Pál befejezte volna, ha marad rá ideje. A hátrahagyott fejezeteken hosszú ideig dolgozott, Vera említette, hogy újra és újra átírta azokat.

– Azért ez szép dolog, befejezni a tanítómester művét.

– Turán Pált korán érte a halál. Ez nekem, és másoknak is nagy veszteséget jelentett. Annyi mindent lehetett volna még tanulni tőle. Csak 66 éves volt. Számolom, én most vagyok annyi.

– Térjünk rá a kutatásaidra. Korunk jellemzője a tudományterületek felparcellázódása. A számelméletben ilyen részterületekről olvashatunk: elemi számelmélet, analitikus számelmélet, algebrai számelmélet, kombinatorikus számelmélet, prímszámelmélet, additív számelmélet, diofantoszi egyenletek, geometriai számelmélet, számításelméleti számelmélet. A részterületek is tovább bomlanak: az analitikus számelméletben a prímszámtételre, s mindenek fölött a Riemann-sejtésre. Te melyik területét műveled a számelméletnek?

– Az analitikus számelméletet, ezen belül a prímszámok eloszlása, a prímszámokra vonatkozó additív problémák foglalkoztatnak. Az additív összeadást jelent, a prímszámelmélet egyik leghíresebb problémája a Goldbach-sejtés is erre vonatkozó kérdést vet fel; igaz-e, hogy minden 2-nél nagyobb páros szám előállítható két prímszám összegeként? Már a kérdés is rámutat a probléma nehézségére. A prímszámokat ugyanis szorzás által definiáljuk, az egész számok szorzásra vett struktúrájának atomjaiként, alap építőköveiként határozzuk meg azokat.

Minden egynél nagyobb egész számot felírhatunk prímszámok szorzataként, s ha a sorrendtől eltekintünk, ez az előállítás egyértelmű. Ez a számelmélet alaptétele. Sok matematikus úgy gondolja, hogy ezt már Eukleidész is tudta, sőt ennek a bizonyításához is megvolt az alapgondolata. A korrekt bizonyítást azonban a matematika fejlettségéhez képest viszonylag későn, 1801-ben adta meg Gauss.

– A számelméleti kutatásokban mi jelent nehézséget?

– A számelméletben többnyire megtalálhatók, de eredeti formájukban nem mindig vezetnek eredményre azok a módszerek, amelyek másutt sikeresen alkalmazhatók. Itt van például a páratlan Goldbach-sejtés, ami azt mondja ki, hogy minden 5-nél nagyobb páratlan szám előáll három prímszám összegeként. Ez hasonlít a páros Goldbach-problémához, csak könnyebb, mert itt három szabad változónk van. Kell is három, mivel páratlan számot állítanak elő. A páratlan Goldbach-sejtést már 80 éve sikerült bebizonyítania Vinogradovnak, legalább is elég nagy páratlan számok esetén. A prímszámokra kimutatható törvényszerűségek általában csak nagyon nagy számoknál mutatkoznak meg igazán. Nagy számokra könnyebb bizonyítani.

A Széchenyi-díjas Pintz János és a Magyar Érdemrend Nagykeresztjével kitüntetett Szemerédi Endre (Parlament, 2013. március 15.)

– Hogyan lehet összekötni a prímszámok szorzásra épülő multiplikatív struktúráját a Goldbach-sejtés additív kívánalmaival?

– Nehéz lenne ezt precízen elmondani, de talán egy leegyszerűsített példával kissé rávilágíthatok a módszerre. Már középiskolában megismerjük az exponenciális függvényt, amelynek a kitevője a változó. Ilyen például a 2^x függvény. Ha 2-t az $x+y$-adik hatványra emelem, az ugyanaz, mintha 2-t külön az x-edik és y-adik hatványra emelem, s utána ezeket összeszorzom. Nem összeadom, hanem összeszorzom: $2^{x+y} = 2^x 2^y$. Ez adhatja a kapcsolódási pontot az összeadás és a szorzás között, nemcsak az egészek, hanem a többi valós szám esetében is. Azért azt senki ne képzelje, hogy enynyire egyszerű a megoldáshoz vezető alapgondolat. A páratlan Goldbach-sejtés első korszakalkotó megközelítésében éppen az exponenciális összegekre vonatkozó ún. körmódszer játszott döntő szerepet, melyet Hardy, Littlewood, és a fiatalon elhunyt zseniális indiai matematikus, Ramanujan dolgozott ki, majd egy bő évtized múlva I. M. Vinogradov vitt csaknem teljes sikerre. Hardy és Littlewood 1923-ban adtak erre a problémára egy 70 oldalas feltételes megoldást. 1936-ban pedig bizonyítatlan feltevés nélkül Vinogradov igazolta, hogy minden elegendően nagy páratlan szám előáll 3 prímszám összegeként. Nemrég pedig Harald Helfgott, perui matematikus 300 oldalas teljes bizonyítást adott a páratlan Goldbach-sejtésre. Bár komoly kételyek nem merültek fel a bizonyításával kapcsolatban, ugyanakkor rendkívül fáradságos lenne annak minden részletét ellenőrizni.

– Ki olvas el egy 300 oldalas bizonyítást?

– Elolvasni még mindig sokkal egyszerűbb, mint lépésről lépésre kontrollálni a bizonyítást. Egy-két alkalommal hallottam erről összefoglaló előadását, azokban persze szó sem lehetett minden részlet tárgyalásáról, még minden segédtétel kimondásáról sem, azonban Helfgott kifejtette, hogy fő gondolatmenetében Vinogradov módszerét fejlesztette tovább. A bizonyításban komoly számítógépes számelmélet van. Körülbelül 25–28 jegyű számokig egy ravasz módszerrel, számítógép segítségével kipróbálták, hogy valóban igaz-e az állítás. Utána már működik a bizonyítás, bár az is komoly, sőt még komolyabb számítógépes számításokat igényel.

– Végignézték számítógéppel az eseteket, úgy, mint a négyszínsejtés bizonyításánál?

– Itt annál egyszerűbb a helyzet. A négyszínsejtés részletes próbálgatással történő megoldásának az alapötletét már a XIX. században felvetették. Később ezen az úton sikerült számítógépek segítségével megoldani. A páratlan Goldbach-sejtés bizonyításánál nem kell szó szerint minden számot kipróbálni addig a bizonyos határig. Olyan módszert kell alkalmazni, mintha részletesen kipróbálnánk.

Ami nagyon lényeges, hogy ezen kívül az eredmény összekapcsolódik a Riemann-sejtéssel, pontosabban annak egy általánosított változatával, melyet 50 évvel Riemann után fogalmazott meg egy Piltz nevű matematikus. A Riemann-sejtés arra vonatkozik, hogy egy bizonyos komplex függvény, a Riemann-féle zeta-függvény gyökei egy egyenesen helyezkednek el. Az általánosított Riemann-sejtés végtelen sok ilyen komplex függvényre vonatkozik. Ezeknek a függvényeknek meghatározott véges körére, ami néhány milliárd ilyen függvényt jelent, kontrollálhatjuk a Riemann-sejtés helyességét egy megfelelő véges tartományban. Vagyis esetünkben megállapíthatjuk, hogy a gyökeik egy bizonyos egyenesen vannak. Nem kell mondanom, hogy ez azért sokkal komplikáltabb, mint azt megnézni, hogy három prímszám összege kiad-e egy adott páratlan számot. Az általánosított Riemann-sejtésnek a komplex számsíkon végtelen sok, úgynevezett Dirichlet-féle komplex függvényre kimondott állítása tehát bármilyen ilyen típusú konkrét függvényre, e számsík véges részében számítógéppel elvben igazolható.

A kutatási területemet általánosan úgy fogalmazhatom meg, hogy a prímszámokra vonatkozó különböző kérdések vizsgálata. Ezen belül ott áll a matematika utolsó 150 évének leghíresebb problémája, a Riemann-sejtés. Tehát, hogy a Riemann-féle komplex zeta-függvény hol vesz fel nulla értéket, hol vannak a gyökei. Riemann 1859-ben mondta ki a sejtését, mely szerint a gyökök mind egy bizonyos végtelen sávban vannak, annak a középegyenesén.

– Hogyan lehetett csaknem 160 éve ilyen sejtést kimondani?

– Nagyon jó a kérdés. Látszik, azonos módon gondolkozunk. Minek alapján juthatott el Riemann ehhez a sejtéshez? Maga a függvény, és általában az értékei is komplexek, és akkoriban számítógépek sem voltak, hogy legalább, ha kisebb léptékben is, de ellenőrizni lehessen a sejtés igazságát. Riemann a matematika egyik legnagyobb alakja volt, sejtésének kimondása után néhány évre, viszonylag fiatalon, a 40. életévében tüdőbetegségben elhunyt. Sejtése nagy hozzájárulás a prímszámok elméletéhez. Érdekes, hogy összesen egy munkát írt a prímszámokról, ez a 9–10 oldalon megjelent berlini akadémiai székfoglaló előadása volt. Ebben kimondott hét sejtést, amiből egy hamisnak bizonyult, a többit a Riemann-sejtés kivételével bebizonyították. Ebben a dolgozatban vázolt egy utat arra, miként lehet a prímszámok eloszlására vonatkozó, már Gauss és Legendre által megsejtett szabályszerűséget bizonyítani. A szabályszerűség azt mondja ki, hogy az x nagyságú prímek átlagos sűrűsége, az egymástól való átlagos távolságuk megközelítőleg az x szám logaritmusa. Ezerjegyű számok körében tehát kb. 2300 az átlagos távolság, a tízezer jegyű számok körében kb. 23 000. Hozzáteszem, Gauss már 15–16 éves korában tanulmányozta az akkor 3 millióig meglévő prímszám táblázatot, és a tényleges eloszlás alapján empirikusan jósolta meg a törvényszerűséget.

Riemann arra a nagyon érdekes összefüggésre jött rá, hogy az általa bevezetett zeta-függvény nagyon szoros összefüggésben áll a prímszámokkal. Abban szinte kódolva van a prímszámok eloszlása.

– Ezt a zeta-függvényt korábban nem vizsgálták?

– Jó száz évvel Riemann előtt már Euler is használta, éppen a prímszámokkal kapcsolatban, később pedig Csebisev is, csak ők valós függvénynek tekintették. Riemann észrevette, ha ugyanabba a formulába komplex számot helyettesítünk, akkor az így adódó komplex függvény még szorosabb kapcsolatban áll a prímszámokkal. Hogy Riemann komplex függvényének a gyökei hol helyezkednek el, ez ekvivalens azzal, hogy milyen nagyságú lehet a prímszámoknak a Gauss által megjósolt törvényszerűségtől való eltérése. Tehát, ha Riemann sejtése igaz, akkor a Gauss-féle formula annyira pontos, amennyire csak elvárható.

Többen próbáltak választ adni arra a kérdésre, miként sikerült megsejteni, hogy a zeta-függvényének a gyökei egy egyenesen vannak. Siegel, a múlt század nagy matematikusa a göttingeni egyetem könyvtárában vizsgálta erre vonatkozóan Riemann hátrahagyott jegyzeteit. Néhány gyök kiszámolásán kívül más utalást nem talált erre.

A tüdőbeteg Riemann halála előtt Olaszországba utazott a kellemesebb klíma nyújtotta gyógyulás reményében. Ott halt meg. Közben lakásában a takarítónő rendet tett, és a számára érthetetlen papírhalmokat egyszerűen kidobta. A huszadik század harmincas éveiben így azután a kutatók már csak arra támaszkodhattak, ami Riemann hagyatékából a könyvtárba került és megmaradt. A Riemann-sejtés igazsága mellett tehát megmaradt másodlagos rejtélynek, hogy ő minek alapján jutott erre a sejtésre.

– Azért fantasztikus dolog olyan sejtést tenni, ami több mint száz éve ad munkát a matematikustársadalomnak.

– Igen, a matematikusok többsége a matematika legnagyobb problémájának tartja a Riemann-sejtést. Olyanok is, akik nem kifejezetten a komplex függvénytanban vagy a számelméletben dolgoznak.

– A te eredményeid miként épülnek be a prímszámelméletbe?

– Vizsgálataim olyan típusú tételekhez vezettek, amelyek a prímszámok szabálytalanságait mutatják meg. A prímszámok végső titkát, amelyet a Riemann-sejtés rejt, nagyon nehéz megfejteni. A matematika Szent Gráljának megoldása ma még szinte megközelíthetetlen feladat. Ugyanakkor vannak ennél egyszerűbb, ám komoly és érdekes kérdések, amelyekre választ adhatunk, ha a Riemann-sejtés által kijelölt úton haladunk. Egyesek a Riemann-féle zeta-függvényről tudnak újat mondani. Én azokra a kérdésekre keresem a választ, hogy a zeta-függvény használatával milyen új állításokat fogalmazhatok meg a prímszámokra vonatkozóan.

A másik két sejtés pedig, amikre az elmúlt 20–25 évben koncentráltam, a már említett páros Goldbach-sejtés és az ikerprím probléma. A Goldbach-sejtés különböző egyszerűsített változatain gondolkoztam, és egy részében sikerült eredményeket elérnem. A Goldbach-probléma keletkezésének időpontját pontosan ismerjük, Goldbach és Euler levelezésében bukkant fel először, 1742-ben. Ennek kiegészítő problémája, amikor nem összeadjuk, hanem kivonjuk a prímszámokat.

– Vagyis az egymástól való távolságukra vagyunk kíváncsiak?

– Úgy van. Amikor a prímek közötti távolság 2, vagyis közéjük csak egy páros szám ékelődik, akkor beszélünk ikerprímekről. Ilyen a 3 és 5, az 5 és 7, azután a 11 és 13, a 17 és 19... A matematikusok úgy gondolják, hogy ez a sorozat soha nem szakad meg. Előbb vagy utóbb mindig előjönnek ilyen prímszám párok, igaz, egyre ritkábban a prímek amúgy is ritkuló sorozatában. 2000-ben még csak azt tudtuk, hogy a prímszámok átlagos közének egynegyedénél kisebb közök előfordulnak végtelen sokszor. Aztán 2005-ben egy amerikai és egy török matematikussal, Daniel Goldstonnal és Cem Yidirimmel együtt nekünk sikerült bebizonyítanunk, hogy végtelen sok olyan prímpár van, amelyek az átlagos távolság akármilyen, előre meghatározott kis hányadánál közelebb kerülnek egymáshoz.

– Meg sem próbállak rávenni arra, hogy vázold a bizonyítást. Azért valamit mégiscsak mondj a módszeretekről.

– Minden módszernek vannak előzményei. A matematika egyik nagy alakja, Atle Selberg az ún. szita módszert alkalmazva bebizonyított egy problémát, amely az ikerprím-sejtés megközelítése volt. A megközelítés abból állt, hogy olyan számpárokat találjon, melyeknek 2 a különbsége és mindkét szám nagyon kevés prímtényezőből álljon. Az ilyen, megadott fix korlátnál kevesebb prímfaktort tartalmazó számokat nevezzük majdnem prímeknek. Selbergnek, az általa kifejlesztett szita módszerrel sikerült bizonyítania, hogy ez végtelen sokszor megvalósítható, ha az egyik számnak maximum két, a másiknak maximum 3 prímfaktora van. Bizonyításunk egyik alkotóeleme volt a Selberg által is alkalmazott módszer. A másik alkotóelem Enrico Bombieri és Aszkold Ivánovics Vinogradov – aki nem azonos a páratlan Goldbach-sejtést nagy számokra megoldó Iván Matejevics Vinogradovval – által igazolt híres tétel, melynek sokféle számelméleti alkalmazása van. Nekik olyan tételt sikerült bizonyítaniuk, ami az általánosított Riemann-sejtés megközelítése, és nagyon sok, prímszámokra vonatkozó problémában helyettesítheti azt. Tehát bizonyos problémák megoldásához kevesebb ismeret is elegendő, mint amennyit a Riemann-sejtés megoldásából levezethetnénk.

– Közbevetőleg, ti hárman, akiknek a nevéhez fűződik az eredmény, hogyan jöttetek össze?

– Olvastam a dolgozatukat, amelyben az egymáshoz legközelebb eső prímek távolságát az átlagos távolság negyedéről levitték volna nyolcadára. Abban a dolgozatban azonban hiba volt, amire mások is rámutattak. Észrevettem, hogy kicsit más úton nemcsak a hiba javítható ki, hanem továbblépve az is bebizonyítható, hogy a prímszámok végtelen sokszor az átlagos távolság akármilyen törtrészénél is közelebb kerülhetnek egymáshoz. Vázlatosan, talán 16 kézzel írt oldalon kiküldtem nekik, hogy a gondolatmenetükön miként kellene változtatni, hogy jobb eredményt kapjunk. Kedvesen válaszoltak, hogy nekik ugyan elsőre ez hihetetlennek tűnik, de szívesen együttműködnek velem. A korábbi kudarcok miatt különösen óvatosak voltak. A teljes gépelt kéziratomat elolvasta kollégám, Révész Szilárd, aki néhány hét múlva csak egyetlen olyan homályos pontot látott benne, ami néhány percre bizonytalanságot okozott bennem, de kérdését sikerült megválaszolnom. Ez a részletes ellenőrzés az eredmény fontos korai megerősítését jelentette.

Goldston és Yidirim többeknek szétküldték a kéziratot. Néhány hónapon belül megérkeztek a pozitív visszaigazolások, mi persze közben már az eredmény továbbfejlesztésén, erősítésén dolgoztunk. Sikerült igazolnunk, hogy a szomszédos prímszámok különbsége végtelen sokszor az átlagos log*n* távolság négyzetgyökére csökkenthető.

Évekkel később az általunk megtalált módszerből ágaztak ki az ikerprím-sejtést még inkább megközelítő eredmények. 2013-ban az amerikai Yitang Zhang bebizonyította, végtelen sok esetben fordul elő, hogy a szomszédos prímek közötti különbség legfeljebb 70 millió.

– Ami igen nagy szám, de mégiscsak egy konkrét határ.

– Pontosan ez a lényeg, hogy a prímek távolsága végtelen sokszor egy határ alatt marad. Később ezt a számot egy Terrence Tao által vezetett kutatócsoportnak sikerült 4680-ra levinnie. Ennek a csoportnak Harcos Gergely kollégám és én is tagjai voltunk. Rövidesen pedig az angol James Maynard más módon bizonyította, hogy végtelen sok olyan prímpár van, melynek legfeljebb 600 a különbsége.

– 2014-ben megkaptad az Amerikai Matematikai Társaság Cole-díját, melyet háromévente adnak át a megelőző hat évben megjelent nagy jelentőségű publikációért.

– Társszerzőimmel és Zhanggal együtt 2014 januárjában négyen kaptuk meg azt a Cole-díjat, amelyet számelméleti eredményekért adnak át.

– Megnéztem, a magyarok közül rajtad kívül eddig csak Erdős Pál lett Cole-díjas, 1951-ben.

– Őt főként a Gauss és Legendre által megsejtett prímszámtétel elemi bizonyításáért díjazták.

– Amit Selberggel egy időben, tőle függetlenül bizonyított?

– Igen, Selberg ezért Fields-érmet kapott, Pali bácsi pedig egy évvel később Cole-díjat.

– Erdős akkor már túlkoros volt a Fields-éremhez?

– Nem, nem. 1950-ben 37 éves volt, tehát megkaphatta volna a Fields-érmet, amelyben 40 éves korukig részesülhetnek a matematikusok. Vigaszdíj lehetett számára a Cole-díj.

– Azért Cole-díjasnak lenni nagy dicsőség. Utánanéztem, nem akármilyen társaságba kerültél. Itt van például Andrew Wiles, aki a Nagy Fermat-sejtés 350 éves problémáját megoldotta, ebben az évben Abel-díjat is kapott. Abel-díjas lett John Tate is, aki 1956-ban volt Cole-díjas.

– És többen voltak olyanok is a díjazottak között, akik később Fields-érmet kaptak. 2014 előtt csak ketten voltak olyanok, akik nem az Egyesült Államokban vagy Kanadában dolgoztak, amikor a díjat megkapták. A számelméleti eredményért adható Cole-díjat 1931-ben alapították, de a díjnak van egy algebrai ága is, amit 1928-tól adnak ki. Itt is van már egy magyar Cole-díjas, Kollár János, aki az ELTE-n végzett, ő a 2006-os díjazott.

– Hogyan tudtad meg, hogy Cole-díjas lettél?

– Az Amerikai Matematikai Társaságtól 2013 októberében egy e-mail levél érkezett, a tárgy rovatban ez állt: „Cole Prize–2014". Az üzenet megnyitásakor arra gondoltam, Zhangot javasolhatják a díjra, aki az általunk elindított folyamatot sikerre vitte, és engem, más szakemberekkel együtt megkérdeznek a jelöléséről. Amikor az e-mail megnyílt, nagy meglepetésemre úgy kezdődött a levél, hogy...

– Gratulálunk!

– Igen, pontosan úgy.

– Nem akármilyen érzés lehetett.

– Ahogy mondod. Erdős Pali bácsi Cole-díjáról már tudtam, gyorsan megnéztem az Amerikai Matematikai Társaság honlapján az eddigi díjazottakat. A nyolcvan évet felölelő listából sokakat ismertem. Örült nagy nevek voltak köztük. Ezt most nehogy szó szerint értsd!

– Anyagias világunk adja a kérdést: járt a díjjal valamilyen pénzösszeg?

– Nem sok: ötezer dollár, azt osztották meg négyünk között. Csak összehasonlításként említem, hogy a matematikai Nobel-díjként alapított Abel-díjért egymillió dollár, a vele összemérhető presztízsű Fields-éremért 15 ezer dollár, a Wolf-díjért 100 ezer dollár jutalom jár.

A Cole-díjunk átadásán az Abel-díjas, Amerikában élő Lax Péter is ott volt, utána gratulált nekem.

– A Cole-díjjal jutalmazott eredményedet tartod az eddigi legjobbnak?

– Határozott igen a válaszom.

– Akkor Pintz János jó ellenpéldája annak az általános vélekedésnek, hogy a matematikusok nagyon fiatalon érik el a legkiemelkedőbb eredményüket.

– Valóban, amikor elértük ezt az eredményünket, akkor a két szerzőtársam 45 és 50 éves, én 54 éves voltam.

– Tapasztalt, sikeres kutatóként tekintve önmagadra, meg tudnád fogalmazni, hogy matematikusként miben rejlik az erőd?

– Nehéz erre válaszolni.

– Hardy a lényeglátás, a technika és a bizonyító erő hármasáról ír. Te melyikben vagy a legjobb?

– Inkább abból a nézőpontból közelítenék ehhez, hogy gondolkodásmódunkhoz, habitusunkhoz a matematika melyik ága áll a legközelebb. Az én világom az analitikus számelmélet, ahol valóban számolni is kell, nemcsak absztrakt fogalmakkal gondolkozni. Az algebrában, a geometriában egy-egy szimbólum sok mindent jelenthet. A számelméletben a szimbólumok döntő többségükben számot jelentenek, vagy függvényt. Olyan függvényt, ami számhoz számot rendel, még ha ezek a számok esetleg komplex számok is. Más a kombinatorikus, az analitikus, a geometriai, az algebrai látásmód, igaz, az ezekhez szükséges képességek szoros rokonságban állnak egymással. Azért ez nem olyan, mint a matematika és a zene között feltűnni látszó kapcsolat, ami elég egyoldalú. A matematikusok között több zenei tehetséget ismerek, de egy zenészt sem, aki kiváló matematikus lenne.

– A Nemzetközi Matematikai Unió korábbi elnöke, a ma már Abel-díjas Lennart Carleson mondta: „Ha a kutatás során valamilyen akadályba ütközünk, nem muszáj azt minden áron elmozdítani. Néha meg lehet kerülni... Ne csak üldögéljünk, és várjunk a nagy ötletre, hanem dolgozzunk közben közeli problémákon.”

Nektek is van egy hatalmas, mozdíthatatlan sziklátok, melyet kerülgettek, a Riemann-sejtés. Belátható időn belül nehéz lesz megingatni.

– A számelmélet abból a szempontból szerencsés terület, hogy a nagyon nagy problémáknak lehetnek különböző egyszerűbb változatai, lehetséges közelítései. Ezek nagyon gyakran egy számmal jellemezhetők. Így azután az azonos típusú közelítésen belül kicsit vagy sokat javíthatunk akkor is, ha a végcél reménytelenül messze van. Amikor belevágunk, saját korábbi és mások eredményére támaszkodva elkezdünk gondolkozni a problémán, nem kell előre eldönteni, hogy sokkal haladjuk-e meg az addig megtett utat. Ha sikerül komoly előrelépést tennünk, akkor azt publikáljuk, és később a matematikus közösség is sikernek könyveli el.

– Tudsz csapatban dolgozni, vagy inkább magányosan töprengsz?

– Legtöbb esetben nem úgy dolgoztam csapatban, hogy álltunk a tábla előtt, és közösen gondolkoztunk valamin. Másokkal közös cikkeim többnyire úgy születtek, hogy ők eljutottak egy határig, én pedig továbbvittem a probléma megoldását, vagy éppen fordítva, a többiek haladtak tovább az ötletemből kiindulva.

– A matematika fejlődését segítik ezek a híres, megoldatlan problémák? Avagy éppen a fordítottja igaz: a matematika tőlük független fejlődése jut el olyan szintre, hogy ezek a problémák megoldhatóvá váljanak?

– Személyes tapasztalataim a prímszámelméletre vonatkoznak. Korának neves matematikusa, Edmund Landau 1912-ben, az amerikai Cambridge-ben, a Nemzetközi Matematikai Kongresszuson a Riemann-sejtésen kívül a számelmélet négy olyan problémájáról beszélt, amelyekről azt állította, hogy „a tudomány mai állása mellett megtámadhatatlanok.” Ezek voltak: a Goldbach-sejtés, az ikerprímszám sejtés, azután, hogy van-e mindig prímszám két szomszédos négyzetszám között, és van-e végtelen sok olyan n egész szám, hogy n^2+1 prímszám legyen. Ezek a problémák általános iskolás ismeretekkel is megfogalmazhatók, ugyanakkor máig megoldhatatlanok. Szerencsére a megoldásaikhoz vezető úton elért részeredményeknek sok javítási lehetősége kínálkozik.

– A négyzetszámok közötti prímszám problémához kapcsolódik az egyik szép sikered.

– Ebben az első komoly eredményt 1930-ban érték el. A prímek távolságára azután a máig legjobb felső becslést az amerikai Baker és az angol Harman matematikusokkal együtt nekünk sikerült adnunk 2001-ben. De még mindig nem sikerült eléggé közel hozni a prímeket. Itt nem arról van szó, hogy a prímek végtelen sokszor közel kerülnek egymáshoz, hanem arról, hogy sosincs közöttük túl nagy távolság.

Visszatérve a korábbi kérdésedhez, ezek a „megközelíthetetlennek” tűnő problémák igenis ösztönöznek az újabb és újabb módszerek megtalálására.

– Ennyi elismerés, szakmai megbecsülés és díjak után mi az, ami tovább motivál a fárasztó kutatómunkára?

– Nem szeretnék álszerénynek tűnni, de engem ma is felvillanyoznak a tudásomhoz, gondolkodásmódomhoz közel álló problémák, ezek ösztönöznek a kutatómunkára. Amikor ilyen publikációt olvasok, automatikusan elkezdek gondolkozni, hogy mit lehetne finomítani, javítani az eredményen. Most is éppen egy hasonlón dolgozom.

– Mik a távlati terveid a következő évtizedre?

– Van egy nagyobb lélegzetű tervem, egy módszerem a Goldbach-sejtés megközelítésére. Nincs még teljesen kidolgozva. Azért nincs, mert az legalább egy évet venne igénybe, sok számítógépes segítség kellene hozzá, a teljes bizonyítás leírását sem úszném meg 200–300 oldal alatt. Nem jutottam még hozzá, mert a „forró témák” elvitték az időmet. Gyors a fejlődés, a jó ötletet, ha elszalasztja, nem dolgozza ki időben az ember, megelőzhetik mások.

Egyszóval vannak még ötleteim, és egy módszer kidolgozásának a feladata, melynek más esetekre is lesznek továbbviteli lehetőségei.

– Kívánom, hogy még sok jó ötletedet valósítsd meg. Kerüljetek egymáshoz egyre közelebb a prímszámokkal!

Az interjút készítette: STAAR GYULA

A Cole-díj átadásán, 2014 januárjában. Balról: C. Y. Yildirim, Pintz János és D. A. Goldston