

A HUN-REN RÉNYI ALFRÉD MATEMATIKAI KUTATÓINTÉZET KUTATÁSI EREDMÉNYEI 2025-BEN

Algebrai irányú kutatások

Belátták, hogy létezik olyan alacsony hőmérsékletű fázis, ahol a maximális entrópiájú véletlen bolyongás Benjamini-Schramm folytonos expander gráfsorozatokra. Vizsgálták hardcore, pozitív sűrűségű ergodikus egyenes folyamatokban a bundling jelenséget, ennek egy diszkrét rácson vett analógiájára effektív entrópia becslést adtak. Belátták, hogy hiperbolikus térben alacsony hőmérsékletű Poisson-factor potenciálra létezik a q -transform. Vizsgálták degree biased véletlen séták tranzienciáját Barabási–Albert-fákra.

Komplex alaptest esetén egy véges Abel-csoport szeparáló Noether-számának ismeretes egy kombinatorikus jellegű karakterizációja. Az alkalmazásokban azonban (pl. a jelfeldolgozás területén) általában a valós (vagy racionális) alaptest esete releváns, ezért a szeparáló Noether-szám említett karakterizációját kiterjesztették nem algebrailag zárt alaptestek esetére. Továbbá implementáltak egy algoritmust a SageMath matematikai programcsomagba, amely kis méretű (nem feltétlenül Abel-féle) csoportok szeparáló Noether-számát kiszámolja (algebrailag zárt alaptest esetén).

A kvantumcsoportok egyik konstrukciója a klasszikus csoportok koordinátagyűrűjének alkalmas nemkommutatív deformációjából indul ki. Az eljárás közbülső lépésében szerepet játszik a klasszikus csoport kúpjának koordinátagyűrűje. Ennek a kombinatorikus és reprezentációelméleti vizsgálatát indították el. A koordinátagyűrűn természetesen hat a csoport két példányának direkt szorzata, és meghatározták ennek a reprezentációnak az irreducibilis direkt összeadandókra való felbontását.

Létezik egy ϵ pozitív konstans, amelyre ha S egy r rangú véges egyszerű csoport és A egy legalább kételemű generáló részhalmoz, akkor A két konjugáltja szorzatának rendje legalább A rendje az $(1+\epsilon)$ -edik hatványon, ahol a konjugáló elem A egy polinomhatványában van. Ezt sikerült belátni a legtöbb klasszikus csoportra, abban az esetben, amikor A tartalmaz transzvekiót. Valamint bizonyították, hogy a Ferde Szorzat Tétel véletlen konjugáló elemekre is igaz.

Tranzitív permutáció csoportok bázis számáról és minimális fokáról bizonyítottak tételeket. Továbbá megmutatták, hogy sok nem feloldható véges csoportban nem létezik két olyan nemtriviális elemekből álló konjugáltsági osztály, amelyek méretei relatív prímek.

Alkalmazott matematikai kutatások

Perkolációs modelleket vizsgáltak Euklideszi-rácsokon, nemamenábilis és véges gráfokon: statisztikus mechanikához, a mérhető csoportelmélethez és a hálózat-tudományhoz kapcsolódva. Ide tartoztak az interlacementek és más Poisson Zoo modellek, fürtök megkülönböztethetlensége, fázisátmenet gráf-bootstrap perkolációban, véletlen feszítőfák lokális struktúrája, és a súlyozott amenabilitás elméletének kidolgozása. Aktivált bolyongásokról nemzetközi miniworkshopot szerveztek, több eredményt elérve az 1D esetben. Kutatták a véletlen Schrödinger-operátorokat és a kapcsolódó egyenletes bolyongásokat különböző gráfokon.

Súlyozott teljes variációnormában adtak konvergenciabecsléseket, melyeket a korábbi Wasserstein-távolságbeli becslésekből vezettek le a Fourier-analízis módszereivel. Folytatták a véletlen közegbeli Markov-láncok ergodelméletében végzett munkát, speciálisan sorbanállási rendszerek és volatilitás-modellek esetén. Elosztott átlagolási algoritmusok konvergenciasebességét vizsgálták, valamint gráfokon futó Markov-láncok különféle perturbációit vizsgálták, az algoritmus gyorsítási lehetőségeire tekintettel. Nem-konvex optimalizálási problémákon dolgoztak, melyek illikvid piacok optimális befektetési modelljeiből származtak.

A transzformer alapú nyelvi modellek belső reprezentációinak matematikai szerkezetét vizsgálták, különös tekintettel a relációk reprezentációjára. Kimutatták, hogy a relációk számos esetben olyan trilineáris függvényekkel írhatók le, amelyek dimenzióredukciót alkalmazó tenzorhálózatok segítségével állíthatók elő. Az eredményeket bemutató közleményt a kiemelkedően rangos NeurIPS konferencia spotlight kategóriában fogadták el.

A magasabb rendű Fourier-analízis területén spektrális felbontásokon alapuló algoritmusokat vizsgáltak. Különösen a kvadratikus esetben sikerült olyan hatékony algoritmusokat kidolgozni, amelyek a függvényeket strukturált és zajkomponensekre bontják. Az ehhez kapcsolódó, terjedelmes publikáció elkészült és benyújtották.

Helly-típusú problémák gépi keresése során váratlan kapcsolatot tártak fel a kvadratikus programozással, amely új bizonyítási módszerekhez vezetett. Az eredmények a Q1 besorolású *Linear Algebra and its Applications* folyóiratban jelentek meg. A Hadamard-mátrixok vizsgálata során Gröbner-bázis technikák alkalmazásával egy algebrai sejtést is igazoltak.

Analitikus és aritmetikus módszerek

A Kuznyecov-formula 0 súlyú cusp formák két Fourier-együtthatója szorzatának egy spektrális összegét fejezi ki Kloosterman-összegek összegeként. Ebben az évben egy olyan formulát láttak be, amely $1/2$ súlyú cusp formák négy Fourier-együtthatója szorzatának egy spektrális összegét fejezi ki aritmetikai objektumokkal: egész együtthatós kvadratikus alakok adott diszkriminánsú és kodiszkriminánsú párjainak az osztályszámaival.

A matematika egyik legfontosabb problémája a különféle L -függvényekre vonatkozó Riemann-sejtés. Részleges megoldásként gyökmentes tartományokat keresünk. Dirichlet L -függvények gyökmentes tartományaira vonatkozik Tatzawa klasszikus tétele. Ebben az évben ezt általánosították Rankin-Selberg L -függvényekre.

Meghatározták az ortogonális csoport pályáit a szimmetrikus mátrixok terén páratlan karakteresztikájú véges testek felett. A leírás teljes osztályozást, és a pályák elemszámait foglalja magában. Az eredmény szimplektikus Kloosterman-összegek becslésére is alkalmazható.

Korábban meghatározták a nagyságrendjét annak, hogy hány csúcsa van az R sugarú körlapon fekvő rácspontok konvex burkának. Ebben az évben megoldották a hasonló problémát az $xy = N$ hiperbola pozitív ága feletti rácspontokra.

A matematikai analízis különböző ágaiban érték el eredményeket, úgymint Fourier-analízisben, approximációelméletben, az optimális transzport elméletében és dimenzióelméletben.

Fourier-analízisben a Delsarte-féle extrémális problémáról és duálisáról bizonyítottak általános eredményeket: erős lineáris dualitás, az extrémális függvény létezése, és egy parkettázás típusú összefüggés a két extrémális objektum között. Továbbá speciális alkalmazásokat adtak gyenge parkettázásokkal és 1-elkerülő halmazokkal kapcsolatban. A módszerhez kapcsolódóan a geometriai frakcionális kromatikus szám egy szép alkalmazását adták síkbeli egységtávolság gráfokra, valamint elméleti kérdéseket vizsgáltak a sűrűség teljesen általános fogalmával kapcsolatban. Approximációelméletben Bernstein- és Markov-típusú egyenlőtlenségeket igazoltak többváltozós polinomokra. Optimális transzport elméletben Wasserstein-terek izometriáit és merevségét vizsgálták kvantum bitekre és euklideszi gömbökre. Dimenzióelméletben új Hausdorff-típusú dimenziókat vezettek be, és leírták alapvető tulajdonságaikat.

Diszkrét matematikai problémák

Egy új alapvető játékelméleti egyensúlyfogalmat vezettek be. Meghatározták a legcentralizáltabb n -csúcsú gráfokat és fákat. Véletlen reguláris gráfok csillag felbontását és függetlenségi arányát vizsgálták. Különböző Turán-típusú eredményeket értek el gráfokra és hipergráfokra. Ramsey-típusú tételt bizonyítottak részben rendezett halmazokra. Az Erdős–Ko–Rado-tétel egy erősítését adták. Mátrixok tiltott részkonfigurációiról értek el újabb eredményeket. Új metszet feltételeket vizsgáltak extrémális halmazrendszerekben.

Olyan NP-beli nyelveket vizsgáltak, melyeket egy véges sok, teljesen rendezett gráfokból álló halmaz definiál. Kiterjedt konvex geometriai kutatásokat végeztek. Additív reprezentációfüggvényekkel és diofantikus egyenletekkel foglalkoztak.

A 3. mérföldkő cikk megjelent, melyben élrendezett gráfokról szóló eredményeken túl metszetfordított sorozatok maximális számáról belátták a sejtett optimális eredményt, melynek számos következménye van. A 4. mérföldkő keretében síkgráfok Turán-számáról láttak be eredményeket. Síkbeli metrikák és absztrakt fák feszítő közelítő gráfjainak szükséges méretére adtak felső korlátot, mely a SODA konferencián szerepelt, és máris több cikk meghivatkozta.

Az 5. mérföldkőként beígért cikk még elbírálás alatt van, de a szubmoduláris függvények elméletével több publikációjuk is foglalkozott. Karakterizálták grafingok matroidjait, mint korlátos fokú gráfsorozat matroidjainak limeszét. Belátták, hogy a végtelen-alternáló halmazfüggvények pontosan a véges „coverage” függvények végtelen általánosításai.

Járványterjedés elemzésekor vizsgálták, hogy a tudatosság, a viselkedés és a hálózati struktúra miként alakítja a terjedési folyamatokat, illetve hogyan vezethet nemlineáris vagy paradox hatásokhoz.

A Matroid Secretary probléma több speciális esetére is sikerült konstans kompetitív algoritmust adniuk. Fix paraméteres algoritmust dolgoztak ki gyökeresen Steiner-összefüggő irányítások megkeresésére, illetve más irányítási problémákra.

Szaktudományi kutatások

A Szaktudományi osztály megkezdte a felfedezett matematikaoktatás fejlesztését, kutatását és széleskörű elterjesztését célzó négyéves szakmai programjának megvalósítását. Az **Így tanítanánk mi** projekt 2024-ben indult a Rényi Intézet és más szervezetek együttműködésében azzal a céllal, hogy országos matematikatanári hálózatot építsen, fejlessze a módszertani kultúrát, és szakmai támogatást nyújtson a tanároknak. Témakörök és évfolyamok szerint rendezett tanítási segédanyagok és óratervek készülnek, amelyek a mindennapi matematikaoktatás megújítását és a fiatal tanárok szakmai megerősítését is szolgálják. Az eddig elkészült anyagok mindenki számára elérhetőek a <https://itm.renyi.hu/> oldalon.

Topológiai és geometriai kutatások

A Metszési Lemmát javították a pár-metszési és a páratlan-metszési számra. Egy speciális esetben sikerült bebizonyítaniuk Lescure és Meyniel 35 éves sejtését, miszerint minden n -csúcsú k -kromatikus G gráfba beágyazható egy teljes k -csúcsú gráf úgy, hogy éleit él-diszjunkt G -beli utak reprezentálják. Az egységávolság problémát visszavezették egy gráfok merevségével kapcsolatos sejtésre, amely lényegesen kezelhetőbbnek látszik. Belátták Raimi egy klasszikus tételének egy messzemenő általánosítását.

Minkowski-típusú parciális differenciálegyenletekkel kapcsolatban a „geometric flow” módszer segítségével oldották meg az úgynevezett L_p Minkowski-problémát. Sikerült karakterizálniuk a Liakopoulos egyenlőtlenségében az egyenlőség esetét.

Új összefüggéseket tártak fel Noether-bázisok létezése és a nagy számosságok között: megmutatták, hogy reguláris terek esetén a Noether-bázissal nem rendelkező terek minimális számossága az első erősen elérhetetlen számosság. Új eredményeket értek el Delta-terekre vonatkozóan. Spanyol szerzővel közös munkájukban konzisztens karakterizációt adtak diszpergált Boole-terek ω_3 -nál rövidebb számosságsorozataira.

A leíró halmazelméletben sikerült pontosan meghatározniuk a Haar-null halmazokhoz kapcsolódó komplexitási osztályt. A valószínűségi kombinatorikában igazolták, hogy a teljesen grafikus egyszerű régiók P -stabilak. A logika területén egyrészt benyújtották Andréka egy sejtését igazoló munkájukat, másrészt új eredményeket értek el stabil struktúrák mértékelméleti vizsgálatában és a véges részmodell-tulajdonság terén. Emellett új általános koordinátagéometriai keretet dolgoztak ki, valamint fraktálgeometriai vizsgálatokban is születtek ígéretes részeredmények.

Egy új rácspont homológia elméletet dolgoztak ki, mely integrálisan zárt ideálokhoz és részmodulusokhoz rendel duplán gradált homológia modulusokat. Belátták, hogy irreducibilis komplex analitikus síkgörbe szingularitásokra az analitikus rácspont kohomológia teljes beágyazott topologikus invariáns. Vizsgálták a Painlevé-egyenletek 3-rangú reprezentációit és leírták a megfelelő karakter-varietásokat affin harmadfokú felületekként. Meghatározták az elliptikus seregeket, amit a Hitchin-rendszer megad rajtuk, és bebizonyították, hogy a Fourier–Laplace-transzformáció hiperKähler izometriákat létesít az ismert 2-rangú reprezentációjuk modulustereivel. Folytatták szabad involúcióval rendelkező egzotikus sima sokaságok konstrukcióját. Tanulmányozták azon komplex felületek topológiáját, melyek a Bogomolov–Miyazaki–Yau-vonalon vannak. Publikáltak egy cikket olyan 3-gömb-beli csomókról, amelyek nem határolnak diszjunkt körlapokat az átlukasztott $S^2 \times S^2$ -ben.

Erdős Központ

Tematikus szemeszterek, Workshop-ok és Nyári Iskolák szervezése különböző időszereu matematikai témákban

2025-ben az Erdős Központ két kiemelkedően magasszínvonalú tematikus félévet szervezett, tavasszal a statisztikus fizika és valószínűségszámítás, ősszel a komplex sokaságok elmélete témakörökben. Mindkét tematikus félévben két workshop és két nyári iskola, és neves külföldi kutatók hosszútávú látogatása. 2025 nyarán négy „fókuszált hetet” tartottak meg.

Tematikus szemeszter 2025. februártól júniusig.

Valószínűségszámítás és statisztikus fizika

Szervezők: Tóth Bálint (HUN-REN Rényi Intézet/Bristoli Egyetem) és Pete Gábor (HUN-REN Rényi Intézet)

Rendezvények:

Nyári iskola a „Rendezetlen közegek” témában, Workshop a „Rendezetlen közegek” témában, Nyári iskola a „Véletlen Matrikák” témában, Workshop a „Véletlen Matrikák” témában.

Tematikus szemeszter 2025. augusztustól decemberig.

Komplex sokaságok analízise és geometriája

Szervezők: László Lempert (Purdue University), Gábor Székelyhidi (NorthWestern University, Boston), Tamás Darvas (University of Maryland), Szőke Róbert (HUN-REN Rényi Intézet)

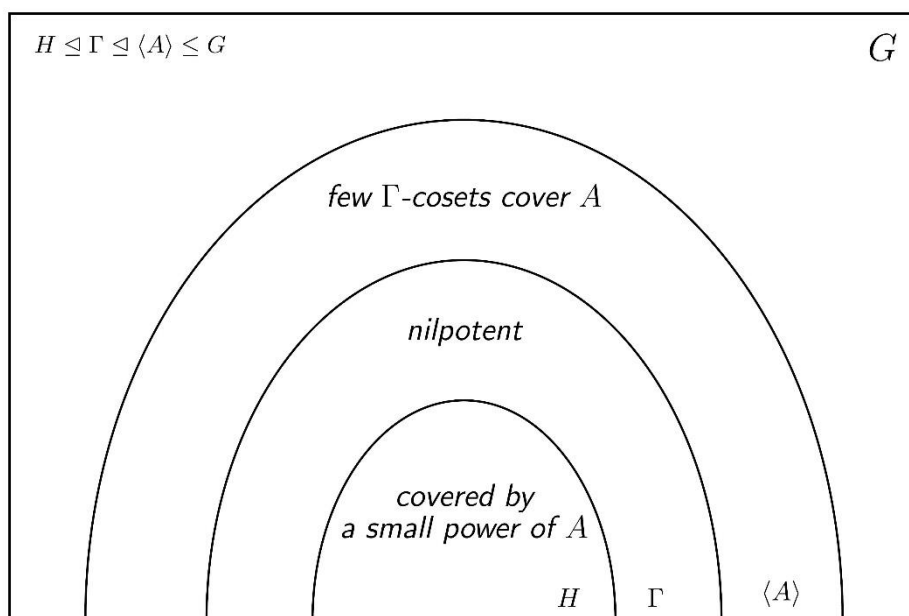
Rendezvények:

Bevezető iskola a komplex geometriába, Iskola a „Szinguláris kanonikus Kahler-sokaságok” témában, Workshop a „Szinguláris kanonikus Kahler-sokaságok” témában, Workshop a „Majdnem komplex és non-Kähler sokaságok” témában.

KIEMELKEDŐ EREDMÉNY 2025-BEN

Növekedés lineáris csoportokban

A legalapvetőbb műveletek, amiket használunk az összeadás és a szorzás. Két természetes szám összege és szorzata is természetes szám. Valójában bármely halmazon megadhatunk hasonló kétváltozós műveletet. Ha még a negatív számokat is be vesszük, illetve azt, ahogyan egy egész számot ellenkező előjellel látunk el, akkor a kapott számhalmaz a nullával együtt az összeadásra nézve csoportot alkot. Ugyanígy a racionális számok szorzásra és reciprokok képzésre nézve csoportot alkotnak. Véges csoportot alkotnak például a Rubik-kocka forgatásai, ahol két forgatássorozatot úgy szorzunk össze, hogy egymás után elvégezzük őket. A véges „felbonthatatlan” úgynevezett egyszerű csoportok elméletének egy új irányzata egy váratlan eredményből ered, mely „Szorzattétel” néven vált ismertté. Az eredmény az egyszerű csoportok részalmazainak egy olyan növekedési tulajdonságára mutat rá, amely jól használható eszközzé vált a matematika más területein. Ezt egymástól függetlenül és egyidőben bizonyították be Pyber-Szabó és a Fields-érmes Terence Tao és társai. A Fields-érmes Bourgain és egy munkatársa rámutatott, hogyan lehet az egyszerű csoportok ezen új növekedési tulajdonságára építve belátni, hogy csoportokhoz tartozó gráfok jelentős része úgynevezett expander gráf. Az expanderek a matematika sok területén használhatók. Az expander gráfok olyan hálózatok, amelyeket bárhogy is vágunk két részre, a két rész között sok él fut. A HUN-REN Rényi Intézet munkatársai egy 2025-ös cikkben [Eberhard S, Murphy B, Pyber L, Szabó E: Growth in linear groups, Duke Mathematical Journal 174:3 pp. 403-448, 46 p. (2025)] belátták Helfgott sejtését egyszerű csoportok nem-növő részalmazainak struktúrájáról. A Duke a hat vezető matematikai újság egyike. Új tételüknek a Szorzattétel speciális esete. Új módszereik alkalmazásaképpen belátják, hogy egy eléggé kvázirandom véges lineáris csoport átmérője polilogaritmikus, ami egy lépés új expanderek konstrukciójának irányában.



Nem-növő részalmazok struktúrája