Matematikai logika

9. előadás

2010. november 23.

1. Előző óráról maradt

1.1. Tétel:

Legyen Γ Skolemformulák halmaza. A következő állítások ekvivalensek:

(1) Γ-nak van modellje (azaz létezik $\mathcal{A}$, hogy $\mathcal{A} \vDash \Gamma$).

(2) Γ-nak van olyan modellje, melynek Γ Herbrand-univerzuma az alaphalmaza.

Bizonyítás:

(2) $\Rightarrow$ (1): Triviális.

(1) $\Rightarrow$ (2): Tegyük fel, hogy $\mathcal{A} \vDash \Gamma$.

Legyen $A_0 = \{$ Γ-beli konstansok $\mathcal{A}$-beli jelentése – ha Γ-ban nincs konstans, akkor tegyük A_0-ba $\mathcal{A}$ egy tetszőleges elemét $\}$.

Ha A_n adott, akkor legyen $A_{n+1} = A_n \cup \{ f^{\mathcal{A}}(a_0 \dots a_{k-1}) : a_0 \dots a_{k-1} \in A_n$, f k változós függvény-szimbólum Γ nyelvében $\}$.

Legyen $B = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$. Ekkor B zárt az $\mathcal{A}$-beli műveletekre: ha f k változós függvényszimbólum Γ nyelvében és $a_0 \dots a_{k-1} \in B \Rightarrow \exists i_0 \dots i_{k-1}: a_0 \in A_{i_0}, a_1 \in A_{i_1}, \dots, a_{k-1} \in A_{i_{k-1}}$.

Legyen $j = \max\{i_0 \dots i_{k-1}\}$. Ekkor $a_0 \dots a_{k-1} \in A_j \Rightarrow f^{\mathcal{A}}(a_0 \dots a_{k-1}) \in A_{j+1} \subseteq B$.

Legyen $\mathcal{B}$ az a részstruktúra $\mathcal{A}$-ban, amelynek B az alaphalmaza. Ekkor $\mathcal{B} \vDash \Gamma$ (a nov. 18-i mese miatt univerzális (Skolem)formulák igazsága részstruktúrákra öröklődik).

Legyen H Γ Herbrand-univerzuma, legyen: $\varphi: H \to \mathcal{B}$,

$$\varphi(t) = \begin{cases} c^{\mathcal{A}}, \text{ha } t = c \text{ konstans szimbólum} \\ f^{\mathcal{A}}(\varphi(t_1) \dots \varphi(t_n)), \text{ha } t = f(t_1 \dots t_n) \end{cases}.$$

Ha R n változós relációszimbólum Γ nyelvében, akkor legyen $R^{\mathcal{B}} = \{\langle t_1 \dots t_n \rangle \in H^n : (\varphi(t_1) \dots \varphi(t_n)) \in R^{\mathcal{A}}\}$. Ekkor $\varphi: \langle H, f_i, R_j, c_k \rangle \xrightarrow[i\in I, j\in J, k\in K]{} \mathcal{B}$ szürjektív homomorfizmus (szürjektív, mert $\mathcal{B}$-re képez, és homomorfizmus, mert φ-t így csináltuk).

Legyen $\alpha \in \Gamma$ tetszőleges.

Állítás:

$\langle H, f_i, R_j, c_k \rangle \vDash_{i\in I, j\in J, k\in K} \alpha$.

Bizonyítás:

Indirekt: tegyük fel, hogy $\langle H, f_i, R_j, c_k \rangle \vDash_{i \in I, j \in J, k \in K} \neg\alpha$. A nov. 16-i (1b) állítás miatt ekkor $\mathcal{B} \vDash \neg\alpha$, ami ellentmondás, tehát az állítás igaz.

Ezért $\langle H, f_i, R_j, c_k \rangle \vDash_{i \in I, j \in J, k \in K} \Gamma$. ■

Megjegyzés:

1-rendű rezolúcióban mindig egyenlőség<u>mentes</u> nyelveket nézünk.

1.2. Tétel:

Legyen Γ 1-rendű klózhalmaz. A következő állítások ekvivalensek:

(1) Γ-nak nincs A alaphalmazú modellje.

(2) $\Gamma(A) \vdash_R \square$.

Bizonyítás:

(2) $\Rightarrow$ (1): Indirekt: tegyük fel, hogy Γ-nak A modellje, de $\Gamma(A) \vdash_R \square$.

Legyen:

$$I\big(R(a_1 \dots a_n)\big) = \begin{cases} i, \text{ha } (a_1 \dots a_n) \in R^{\mathcal{A}} \\ \quad\quad k \text{ különben} \end{cases}$$

($R(a_1 \dots a_n)$: ítéletváltozó; R: relációszimbólum; $a_1 \dots a_n \in A$).

$I \vDash \Gamma(A)$, ezért $I \vDash \square$, mert a rezolúciós kalkulus teljes. Ezzel ellentmondásra jutottunk.

(1) $\Rightarrow$ (2): Γ-nak nincs A alaphalmazú modellje $\overset{(*)}{\Rightarrow}$ $\Gamma(A)$ kielégíthetetlen. A rezolúció teljessége miatt $\Gamma(A) \vdash_R \square$.

$(*)$ részletesebben: ha $\Gamma(A)$-t kielégítené egy I interpretáció, akkor legyen $R^{\mathcal{A}} = \{(a_1 \dots a_n) \in A^n : I \vDash R(a_1 \dots a_n)\}$. Ekkor $\mathcal{A} = \langle A, R^{\mathcal{A}}, \dots \rangle$ modellje lenne Γ-nak. ■

Megjegyzések:

1) Alaprezolúciónál 0-rendű rezolúciót használunk 1-rendű klózhalmazra. Most az ítéletváltozók neveinek van szerkezete, pl. $R(f(a,b),a)$ 1 db ítéletváltozó. Az ítéletváltozók akkor rezolválhatók, ha karakterről karakterre megegyeznek, pl.:
   - $R(a,b)$ és $\neg R(f(a),b)$ nem rezolválható,
   - $R\big(a, g(b)\big)$ és $\neg R\big(a, g(b)\big)$ rezolválható.

2) Alaprezolúción kívül vannak más rezolúciós módszerek is, melyek 1-rendben alkalmazhatók.

2. Feladatok

2.1. Példa:

a) *Formalizáljuk elsőrendű nyelven az alábbi mondatokat:*

1. *Van olyan autó, amely minden biciklinél gyorsabb.*
2. *Ha egy autó gyorsabb egy biciklinél, akkor drágább is nála.*
3. *Minden biciklinél van drágább autó.*

A(x): x autó

B(x): x bicikli

G(x,y): x gyorsabb y-nál

D(x,y): x drágább y-nál

1. $\exists x\left(A(x) \wedge \forall y\left(B(y) \Rightarrow G(x,y)\right)\right)$
2. $\forall x \forall y\left(\left(A(x) \wedge B(y) \wedge G(x,y)\right) \Rightarrow D(x,y)\right)$
3. $\forall x\left(B(x) \Rightarrow \exists y\left(A(y) \wedge D(y,x)\right)\right)$

4. *Alaprezolúcióval lássuk be, hogy* $\{1.,2.\} \vDash 3.$*:*

- Skolem normálformára hozás:

1. $\equiv \exists x\left(A(x) \wedge \forall y\left(\neg B(y) \vee G(x,y)\right)\right)$

$\equiv \exists x \forall y\left(A(x) \wedge \left(\neg B(y) \vee G(x,y)\right)\right)$

$\equiv \forall y\left(A(c) \wedge \left(\neg B(y) \vee G(c,y)\right)\right)$ Skolem

2. $\equiv \forall x \forall y\left(\neg A(x) \vee \neg B(y) \vee \neg G(x,y) \vee D(x,y)\right)$ Skolem

$\neg 3. \equiv \neg\left(\forall x\left(\neg B(x) \vee \exists y\left(A(y) \wedge D(y,x)\right)\right)\right)$

$\equiv \exists x\left(B(x) \wedge \forall y\left(\neg A(y) \vee \neg D(y,x)\right)\right)$

$$\equiv \exists x \forall y \left(B(x) \wedge \left(\neg A(y) \vee \neg D(y,x)\right)\right)$$

$$\equiv \forall y \left(B(d) \wedge \left(\neg A(y) \vee \neg D(y,d)\right)\right) \text{ Skolem}$$

- Elsőrendű klózhalmaz megadása:

$$\Gamma = \left\{ \begin{array}{c} A(c) \\ \neg B(y) \vee G(c,y) \\ \neg A(x) \vee \neg B(y) \vee \neg G(x,y) \vee D(x,y) \\ B(d) \\ \neg A(y) \vee \neg D(y,d) \end{array} \right\}$$

- Herbrand-univerzum megadása:

$$H = \{c, d\}$$

- Rezolúció:

1. $\neg A(c) \vee \neg B(d) \vee \neg G(c,d) \vee D(c,d)$	felt.
2. $A(c)$	felt.
3. $\neg B(d) \vee \neg G(c,d) \vee D(c,d)$	R(1,2)
4. $B(d)$	felt.
5. $\neg G(c,d) \vee D(c,d)$	R(3,4)
6. $\neg B(d) \vee G(c,d)$	felt.
7. $D(c,d) \vee \neg B(d)$	R(5.6)
8. $\neg A(c) \vee \neg D(c,d)$	felt.
9. $\neg B(d) \vee \neg A(c)$	R(7,8)
10. $\neg A(c)$	R(4,9)
11. $\square$	R(2,10)

2.2. Példa:

Teljességi tétel felhasználása nélkül igazoljuk a következő állítást: ha $\Sigma \cup \{\alpha\} \vdash \beta$ *és* $\Sigma \cup \{\neg\alpha\} \vdash \beta$, *akkor* $\Sigma \vdash \beta$.

Biz.:

- $\Sigma \cup \{\alpha\} \vdash \beta$ pont akkor, ha $\Sigma \cup \{\alpha, \neg\beta\}$ ellentmondásos pont akkor, ha $\Sigma \cup \{\neg\beta\} \vdash \neg\alpha$.

- $\Sigma \cup \{\neg\alpha\} \vdash \beta$ pont akkor, ha $\Sigma \cup \{\neg\alpha, \neg\beta\}$ ellentmondásos pont akkor, ha $\Sigma \cup \{\neg\beta\} \vdash \alpha$.

$\Sigma \cup \{\neg\beta\}$ így ellentmondásos, tehát $\Sigma \vdash \beta$.

2.3. Példa:

Adjuk meg az alábbi formula egy modelljét: $\varphi = \forall x \forall y \exists z \big(R(x,z) \wedge R(z,y)\big)$.

1. megoldás: $A = \{0\}$,

$R(x,y) \Leftrightarrow x = y$,

$\mathcal{A} = \langle A, = \rangle \vDash \varphi$.

2. megoldás: $A = \{1,2,3\}$ (egy konkrét gráf csúcsai),

$R(x,y) \Leftrightarrow$ él megy az ábra szerint x és y között,

$\mathcal{A} = \langle A, R \rangle \vDash \varphi$.