Felsőbb matematika informatikusoknak C
2010. november 18.-i Logika előadás

Farkas Péter

2010. december 6.

1. Előző óráról maradt

1.1. Tétel (Rez. kalkulus teljességi tétele). *Ekvivalensek:*

1. Γ *kielégíthetetlen.*
2. $\Gamma \vdash_R \Box$.

Bizonyítás: (2) $\Longrightarrow$ (1) elöző órán volt.
(1) $\Longrightarrow$ (2): Ha Γ kielégíthetetlen akkor szemantikus fája zárt. Legyen a zárt szemantikus fában az élek száma n.
Indukció n-re:
Ha $n = 0$ akkor $\Box \in \Gamma$ így $\Gamma \vdash_R \Box$.
Tegyük fel, hogy ha valamely kielégíthetetlen Γ' zárt szemantikus fájában az élek száma $< n$, akkor $\Gamma' \vdash_R \Box$.

1.1. Állítás. Γ *szemantikus fájában van olyan csúcs melynek mindkét rákövetkezője cáfoló.*
Bizonyítás: *Indirekt: Tegyük fel, hogy nincs ilyen csúcs. Legyen* a_0 *gyökér, ha*

$$a_i \textit{ adott akkor} \begin{cases} a_i \textit{ levél vagy} \\ a_i \textit{ valamelyik rákövetkezője nem cáfoló csúcs, ez legyen } a_{i+1}. \end{cases}$$

Ekkor az $a_1 ... a_n$ *ágon nincs cáfoló csúcs, ami ellentmond annak, hogy* Γ *szemantikus fája zárt.* ⊠

Tehát van olyan csúcs melynek mindkét rákövetkezője cáfoló, a rákövetkezők rezolválhatók. Legyen c a rezolvensük.
Legyen $\Gamma' = \Gamma \cup \{c\}$. Γ' zárt szemantikus fájában n-nél kevesebb él van. Az indukció miatt $\Gamma' \vdash_R \Box$, tehát $\Gamma \vdash_R \Box$. ⊠

2. Elsőrendű rezolúciós kalkulus

Emlékeztető: φ prenex-normálforma, ha $\varphi = Q_1x_1Q_2x_2...Q_nx_n\psi$ ahol Q_i kvantor, ψ kvantor mentes.

2.1. Definició. *φ Skolem normálformájú, ha φ prenex alakú és $Q_1 = Q_2 = ... = Q_n = \forall$*

2.1. Mese. $\mathcal{A} = \langle A^i, f_i^{\mathcal{A}}, f_j^{\mathcal{A}}, c_k^{\mathcal{A}}\rangle_{\substack{i \in I \\ j \in J \\ k \in K}}$ *részstruktúrája*

$\mathcal{B} = \langle B^i, R_i^{\mathcal{B}}, f_j^{\mathcal{B}}, c_k^{\mathcal{B}}\rangle_{\substack{i \in I \\ j \in J \\ k \in K}}$ *-nak, ha*

$A \subseteq B$ és A-n az $\mathcal{A}$-beli és $\mathcal{B}$-beli relációk, függvények, konstansok ugyan úgy hatnak.

2.1. Állítás. *Legyen $\mathcal{A}$ részstruktúrája $\mathcal{B}$-nek. Legyen φ Skolem alakú. Ha $\mathcal{B} \models \varphi$, akkor $\mathcal{A} \models \varphi$ (ha φ-re $\mathcal{A}$-ban lenne ellenpélda, akkor ez $\mathcal{B}$-ben is ellenpélda lenne φ-re).*
Legyen $\varphi = \exists x(x \cdot x = -1)$, $\mathcal{B}$ = komplex számok teste, $\mathcal{A}$ = valós számok teste. $\mathcal{A}$ részstruktúrája $\mathcal{B}$-nek, $\mathcal{B} \models \varphi$, de $\mathcal{A} \not\models \varphi$.
Ezért φ egyetlen Skolem-formával sem ekvivalens.

2.1. Tétel. *Tetszőleges φ formulához van olyan Skolem formájú φ', hogy*

- *φ' esetleg bővebb nyelven van, mint φ.*
- *$\varphi' \models \varphi$.*
- *Ha $\mathcal{A} \models \varphi$, akkor van olyan $\mathcal{A}'$, hogy $\mathcal{A}' \models \varphi'$ és φ nyelvén $\mathcal{A}$ és $\mathcal{A}'$ megegyezik.*

Bizonyítás: Volt, hogy φ ekvivalens egy prenex formájú formulával (így feltehető φ : prenex).

$$\varphi = Q_1x_1Q_2x_2...Q_nx_n\psi, \text{ ahol } \psi \text{ kvantormentes.}$$

Keressük az első „$\exists$"-t, (ha nincs, akkor φ Skolem alakú.)

$$\varphi = \forall x_1\forall x_2...\forall x_k\exists x_{k+1}\varrho$$

Legyen f új k változós függvény szimbólum és tekintsük a $\varphi^* = \forall x_1\forall x_2...\forall x_k\varrho^*$ formulát, ahol ϱ^*-ot úgy kapjuk, hogy ϱ-ban x_{k+1} szabad előfordulásait $f(x_1, x_2, ..., x_k)$-ra cseréljük.
ϱ^* : ϱ 1-lépéses skolemizáltja.

Világos, hogy $\varrho^* \vDash \varrho$ (x_{k+1}-t $f(x_1, x_2, ..., x_k)$ szerint válasszuk). Fordítva, ha $\mathcal{A} \vDash \varphi$ akkor van k-változós f függvény $\mathcal{A}$-n, hogy $\langle \mathcal{A}, f \rangle \vDash \varphi^*$. φ^*-ben a „$\exists$"-ak száma kevesebb, mint φ-ben. Így $\varphi^{\overbrace{*..*}^{l}}$ Skolem alakú, ha φ-ben l darab „$\exists$" volt. $\boxtimes$

2.1. Lemma. *Az algoritmus Skolem formára hozásra:*

1. *Hozzuk prenex formára.*

2. *Az 1-lépéses skolemizálást ismételgessük, míg van „$\exists$".*

2.1. Példa. *Hozzuk Skolem alakra:*

1. $\exists x_1 \forall x_2 \exists x_3 \forall x_4 \forall x_5 P(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$
   $\Longrightarrow$ *prenex. Első „$\exists$" x_1-nél. Legyen c új 0-változós függvény szimbólum (azaz konstans szimbólum).*
   $\forall x_2 \exists x_3 \forall x_4 \forall x_5 P(c, x_2, x_3, x_4, x_5)$ *Első „$\exists$" x_3-nál. Legyen f új 1-változós függvény szimbólum.*
   $\forall x_2 \forall x_4 \forall x_5 P(c, x_2, f(x_2), x_4, x_5) \Longrightarrow$ *Skolem.*

2. $\varphi = \forall x_1 (\exists x_2 P(x_2) \Rightarrow \exists x_3 R(x_1, x_2, x_3))$ *(nem prenex)*
   $\equiv \forall x_1 (\neg(\exists x_2 P(x_2)) \vee \exists x_3 R(x_1, x_2, x_3)) \equiv \forall x_1 (\forall x_2 \neg P(x_2) \vee \exists x_3 R(x_1, x_2, x_3))$
   (x_2-t átnevezve x_4-é, majd a kvantort kiemelve)
   $\equiv \forall x_1 \forall x_4 (\neg P(x_4) \vee \exists x_3 R(x_1, x_2, x_3)) \equiv \forall x_1 \forall x_4 \exists x_3 (\neg P(x_4) \vee R(x_1, x_2, x_3))$
   (prenex)
   $\equiv \forall x_1 \forall x_4 (\neg P(x_4) \vee R(x_1, x_2, f(x_1, x_4)))$ *(Skolem)*

2.2. Definició (Herbrand-univerzum). *Legyen Γ elsőrendű formulahalmaz. Ha Γ-ban nincs konstans szimbólum akkor hozzáveszünk egyet. (ha van konstans szimbólum, akkor nem veszünk hozzá). Legyen L' az így kapott nyelv. Ekkor Γ Herbrand-univerzuma L' változó mentes term-jei.*

2.2. Példa.

1. *$L' = c$ konstans szimbólum, f : 2 változós függvény szimbólum*
   Herbrand-univerzum: $c, f(c, c), f(c, f(c, c)), f(f(c, c), c), f(f(c, c), f(c, c)), ...$

2. *c_1, c_2 konstans szimbólum, f, g : 1 változós függvény szimbólum*
   Herbrand-univerzum: $c_1, c_2, f(c_1), f(c_2), g(c_1), g(c_2), f(g(c_1)), g(f(c_2)), ...$

2.2. Tétel. *Legyen Γ Skolem-formulák egy halmaza. Ekvivalensek:*

1. *Γ-nak van modellje.*

2. Γ-nak van olyan modellje melynek alaphalmaza Γ Herbrand-univerzuma.

Bizonyítás: Később. $\boxtimes$

2.3. Definició. *Ha $\varphi = \forall x_1 \forall x_2 \ldots \forall x_n \psi$ Skolem formájú formula akkor ψ-hez tartozó elsőrendű klózok*

- *kvantorokat elhagyjuk (hiszen mindegyik „$\forall$”)*
- *ψ-t KNF-é (Konjunktív normálformává) alakítjuk*
- *ezután, mint 0 rendben.*

2.4. Definició. *Legyen Γ elsőrendű klózok halmaza, A tetszőleges halmaz. $\Gamma(A) = A$ elemeit Γ változóiba az összes lehetséges módon beleírjuk. $\Gamma(A)$: Γ-nak A feletti alappéldányai.*

2.3. Tétel (Alaprezolúció teljessége). *Legyen Γ elsőrendű klóz halmaz. Ekvivalensek:*

1. *Γ-nak nincs modellje (azaz Γ kielégíthetetlen).*
2. *$\Gamma(H) \vdash_R \Box$, ahol $H : \Gamma$ Herbrand-univerzuma.*

Bizonyítás: (1) $\underbrace{\iff}_{\text{2.2 tétel miatt}}$ Γ-nak nincs olyan modellje aminek Γ Herbrand-univerzuma az alaphalmaza $\iff$ $\Gamma(H) \vdash_R \Box$. Az utolsó ekvivalencia az alábbi tételből adódik. $\boxtimes$

2.4. Tétel. *Ekvivalensek:*

1. *Γ-nak A-n nincs modellje.*
2. *$\Gamma(A) \vdash_R \Box$.*

Bizonyítás: Később. $\boxtimes$

2.3. Példa. *Elsőrendű rezolúcióra*

1. *Minden kutyának van gazdája. ($k(x)$: x kutya, $G(x, y)$: x gazdája y-nak)*
2. *Bodri egy kutya.*
3. *Tehát Bodrinak is van gazdája.*

Legyen:

- $\varphi_1 = \forall x(k(x) \Rightarrow \exists y G(y, x))$
- $\varphi_2 = k(Bodri)$
- $\varphi_3 = \exists x G(x, Bodri)$
- $\sum = \{\varphi_1, \varphi_2\}$

Kérdés: $\sum \vDash \varphi_3$ *igaz-e, azaz* $\Gamma = \sum \cup \{\neg\varphi_3\}$ *kielégíthetetlen-e?*
Hozzuk Skolem alakra:

- $\varphi_1 \equiv \forall x(\neg k(x) \vee \exists y G(y, x)) \equiv \forall x \exists y(\neg k(x) \vee G(y, x))$ *(prenex)* $\equiv \forall x(\neg k(x) \vee G(f(x), x))$ *(Skolem)*
- $\varphi_2 = k(Bodri)$ *(Skolem)*
- $\neg\varphi_3 = \neg\exists x G(x, Bodri) \equiv \forall x(\neg G(x, Bodri))$ *(Skolem)*

Klózok:

1. $\neg k(x) \vee G(f(x), x)$
2. $k(Bodri)$
3. $\neg G(x, Bodri)$

Herbrand-univerzum: $Bodri, f(Bodri), f(f(Bodri)), f(f(f(Bodri))), \ldots$

1. $\neg k(Bodri) \vee G(f(Bodri), Bodri)$ *(felt. 1)*
2. $k(Bodri)$ *(felt 2.)*
3. $G(f(Bodri), Bodri)$ *(Rezolúció(1,2))*
4. $\neg G(f(Bodri), Bodri)$ *(felt. 3)*
5. $\Box$ *(Rezolúció(3,4))*

Tehát $\sum \vDash \varphi_3$.