<Teljességi tétel bizonyításának folytatása>:

(2) $\Rightarrow$ (1): tegyük fel, hogy 2. szerint: $\Sigma \vdash \varphi$. Ekkor van olyan véges formula sorozat ($\alpha_1 \ldots \alpha_n$), hogy $\alpha_n = \varphi$ és az összes többi α_i-re ($1 \leq i \leq n$):

- α_i axióma, vagy
- $\alpha_i \in \Sigma$, vagy
- α_i *modus ponens*-sel kapható korábbi α_j–kből.

Ezután i szerinti indukcióval megmutatjuk, hogy $\Sigma \models \alpha_i$ minden i-re (így $\Sigma \models \alpha_n$ azaz $\Sigma \models \varphi$).

(*) Vegyük észre, hogy a *modus ponens* helyes: $\{P, P \Rightarrow Q\} \models Q$:
Ha $\sigma \models P$, $\sigma \models P \Rightarrow Q$ akkor σ-ban igaz a Q ($\sigma \models Q$).

Legyen σ olyan interpretáció, hogy $\sigma \models \Sigma$. Ekkor elég megmutatnunk, hogy $\sigma \models \alpha_i$.
Indukciós alaplépés: α_1 vagy axióma, ekkor $\sigma \models \alpha_i$ (táblázattal ellenőrizhető, hogy az axiómák minden interpretációban igazak), vagy $\in \Sigma$.
Tegyük fel, hogy minden j(<i)-re $\sigma \models \alpha_j$.
α_i vagy axióma, vagy $\in \Sigma$ (mint az alaplépésnél), vagy *modus ponens*-sel jön korábbi α_j–kből. Utóbbi esetben van j,k<i: $\alpha_k = \alpha_j \Rightarrow \alpha_i$, az indukció miatt $\sigma \models \{\alpha_k, \alpha_j\}$, azaz $\sigma \models \{\alpha_j \Rightarrow \alpha_i, \alpha_j\}$, így (*) miatt $\sigma \models \{\alpha_i\}$.

KÉSZ

Az elsőrendű logika bizonyításelmélete

Teljességi tétel

Megadható összesen 7 axiómaséma, hogy ezekből Modus Ponens-sel minden helyes következtetés bizonyítható.
Bizonyítás: vázlat (Elsőrendű esetben)

Ha $\Sigma \vdash \varphi$ akkor $\Sigma \models \varphi$: mint ítéletkalkulusban, indukció a levezetés hosszára.

Ha $\Sigma \models \varphi$ akkor $\Sigma \vdash \varphi$: be kell látni, hogy

a.) $\Sigma \vdash \varphi$ pontosan akkor, ha $\Sigma \cup \{\neg\varphi\}$ ellentmondásos;

b.) ellentmondástalan Σ kiterjeszthető teljes ellentmondástalan Σ'-vé;

c.) teljes, ellentmondástalan Σ' formulahalmaznak van modellje.

Ezek után a többi részlet hasonló az ítéletkalkulus esetéhez.
Megjegyzés: (c) olyan $\mathcal{A}$ struktúrát ad, hogy $\mathcal{A} \models \Sigma$ és $|A| \leq |\Sigma'|$.

Tétel: Eldönthetőség

Legyen Σ (nulladrendű vagy elsőrendű) véges és teljes formulahalmaz.
Van olyan algoritmus, mely minden bemenetre véges sok lépésben megáll (befejeződik) és adott φ-re (mint inputra) helyes választ ad arra, hogy „$\Sigma \overset{?}{\models} \varphi$”.

Bizonyítás: Feltehetjük, hogy Σ ellentmondástalan, mert ellentmondásos Σ-ra az állítás triviális. Mivel Σ véges, így felsorolhatók azok a véges $\alpha_1, \alpha_2 \ldots \alpha_n$ formulasorozatok, melyek Σ–ból való levezetések. Soroljuk ezeket fel addig, amíg φ vagy $\neg\varphi$ meg nem jelenik egy levezetés végén. Σ teljes, így az algoritmus befejeződik. A teljességi tétel miatt a válasz helyes lesz. ($\Sigma \vDash \varphi$ pontosan akkor, ha $\Sigma \vdash \varphi$)

KÉSZ

Megjegyzés: lesz jobb módszer is erre.

Tétel: Kompaktsági tétel első alakja

Legyen Σ (nulladrendű vagy elsőrendű) formulahalmaz, φ formula.
Ekvivalensek:
(1) $\Sigma \vDash \varphi$.
(2) van olyan véges $\Sigma' \subseteq \Sigma$: $\Sigma' \vDash \varphi$.

Bizonyítás: (2)⇒(1) triviális.
(1)⇒(2): tegyük fel, hogy $\Sigma \vDash \varphi$, ekkor a teljességi tétel miatt: $\Sigma \vdash \varphi$.
Legyen $\alpha_1, \alpha_2 \ldots \alpha_n$ egy ilyen levezetés ($\alpha_n = \varphi$), ebben Σ-nak csak véges sok eleme van, ezért $\Sigma' = \Sigma \cap \{\alpha_1, \alpha_2 \ldots \alpha_n\}$ véges és ugyanez a sorozat ($\alpha_1, \alpha_2 \ldots \alpha_n$) mutatja, hogy $\Sigma' \vdash \varphi$. Végül a teljességi tétel miatt $\Sigma' \vDash \varphi$.

KÉSZ

Tétel: Kompaktsági tétel második alakja

Legyen Σ (nulladrendű vagy elsőrendű) formulahalmaz.
Ekvivalensek:
(1) Σ-nak van modellje.
(2) Σ összes VÉGES részének van modellje.

Bizonyítás: (1)⇒(2) triviális.
(2)⇒(1): tegyük fel, hogy Σ összes VÉGES részének van modellje, de Σ-nak nincs. A teljességi tétel (c) pontja miatt Σ ellentmondásos kell legyen. Ekkor létezik α formula, amire $\Sigma \vdash \alpha$, $\Sigma \vdash \neg\alpha$, így van véges $\Sigma' \subseteq \Sigma$: $\Sigma' \vdash \alpha$ és $\Sigma' \vdash \neg\alpha$ (úgy, mint az első kompaktsági tétel bizonyításában). A teljességi tétel miatt $\Sigma' \vDash \alpha$, $\Sigma' \vDash \neg\alpha$. Σ' véges, így (Σ'-nek is) van $\mathcal{A}$ modellje : $\mathcal{A} \vDash \Sigma'$. Tehát $\mathcal{A} \vDash \alpha$ és $\mathcal{A} \vDash \neg\alpha$, ami viszont nem lehetséges, ellentmondásra jutunk.

KÉSZ

Definíció: Legyen $\mathcal{A}$ elsőrendű *struktúra*. $\mathcal{A}$ elmélete:

$$\mathrm{TH}(\mathcal{A}) = \{\varphi : \mathcal{A} \vDash \varphi\}.$$

Legyen $\mathcal{B}$ struktúra. $\mathcal{A} \equiv_e \mathcal{B}$ *elemi ekvivalens*, ha $\mathrm{TH}(\mathcal{A}) = \mathrm{TH}(\mathcal{B})$.

Definíció:

$$! \mathcal{A} = \left\langle A, R_i^{\mathcal{A}}, f_j^{\mathcal{A}}, c_k^{\mathcal{A}} \right\rangle_{\substack{i\in I\\ j\in J\\ k\in K}} \qquad ! \mathcal{B} = \left\langle B, R_i^{\mathcal{B}}, f_j^{\mathcal{B}}, c_k^{\mathcal{B}} \right\rangle_{\substack{i\in I\\ j\in J\\ k\in K}}$$

$\mathcal{A} \cong \mathcal{B}$ (izomorfok), ha létezik $\varphi : A \to B$ bijekció úgy, hogy

$\forall a_1, a_2, \ldots a_n \in \mathcal{A}, \forall i \in I, \forall j \in J, \forall k \in K$-ra

$$(a_1, a_2, \ldots a_n) \in R_i^{\mathcal{A}} \text{ pontosan akkor, ha } (\varphi(a_1), \varphi(a_2) \ldots \varphi(a_n)) \in R_i^{\mathcal{B}}$$

$$\varphi(f_j^{\mathcal{A}}(a_1 \ldots a_n)) = f_j^{\mathcal{B}}(\varphi(a_1) \ldots \varphi(a_n))$$

$$\varphi(c_k^{\mathcal{A}}) = c_k^{\mathcal{B}}$$

Tétel:

(1) Ha $\mathcal{A} \cong \mathcal{B}$, akkor $\mathcal{A} \equiv_e \mathcal{B}$.

(2) (1) visszafele nem igaz. Sőt, ha $\mathcal{A}$ végtelen struktúra, akkor van olyan $\mathcal{A}'$, amire $\mathcal{A}' \equiv_e \mathcal{A}$, de $\mathcal{A}' \ncong \mathcal{A}$. (azaz a végtelen struktúrák elsőrendben izomorfizmus erejéig leírhatatlanok.)

Bizonyítás:

(2) Legyen $\mathcal{A}$ végtelen struktúra.

Legyen I olyan halmaz, hogy $|I| > |A|$.

Legyen $\Sigma = TH(\mathcal{A}) \cup \{c_i \neq c_j : i \neq j, i,j \in I\}$, ahol a c_i-k új konstansszimbólumok.

Belátjuk, hogy Σ minden véges részének van modellje.

Legyen $\Sigma^* \subseteq \Sigma$ véges.

Van véges Γ_1, Γ_2: $\Sigma^* = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$

$\Gamma_1 \subseteq TH(\mathcal{A}), \Gamma_2 = \{c_{i1} \neq c_{j1}, \ldots c_{in} \neq c_{jn}\}$

Legyen $a_1 \ldots a_k \in A$ annyi páronként különböző elem, amennyi „c” van Γ_2-ben (ilyen van, mert Γ_2 véges és $\mathcal{A}$ végtelen).

Legyen $\mathcal{A}^* = \langle A, \ldots, a_1 \ldots a_k \rangle$

(<mint $\mathcal{A}$ leírása; $a_1 \ldots a_k$: Γ_2-beli konstans szimbólumok megfelelői>)

- $\mathcal{A}^* \models \Sigma^*$. Emiatt Σ véges részeinek van modellje, a kompaktsági tétel 2. alakja miatt Σ-nak van modellje (és ez $\mathcal{A}'$) $\Rightarrow |A'| \geq |I| > |A|$, ezért $A \to A'$ bijekció közöttük nem lehet, így $\mathcal{A}' \ncong \mathcal{A}$.

De $\mathcal{A}' \models \Sigma$ miatt $\mathcal{A} \equiv_e \mathcal{A}'$.

KÉSZ