# Matematikai logika – 4. előadás

Begépelte: Devecseri Viktor

2010. november 4.

## 1. Logikai következmény

### 1.1. Ítéletkalkulusban

**Definíció.** Legyen $k : \{\textit{változók}\} \to \{i, h\}$. Legyen $\Sigma$ formulahalmaz, $\phi$ formula.

- $\underbrace{k \models \Sigma}_{k\text{-ban igaz } \Sigma}$, ha minden $\rho \in \Sigma : k \models \rho$.
- $\underbrace{\Sigma \models \rho}_{\Sigma\text{-nak következménye } \phi}$, ha minden $k$-ra, $k \models \Sigma$ esetén $k \models \phi$.

**Példa.**
Szövegesen:

1. Ha Zita nem éri el az 50%-ot, akkor megbukik.
2. Vagy puskázik, vagy nem éri el az 50%-ot.
3. Tehát ha puskázik, akkor átmegy.

Változók:

1. E: eléri az 50%-ot.
2. B: megbukik
3. P: puskázik

Formulákkal:

1. $\neg E \Rightarrow B$
2. $P \vee \neg E$
3. $P \Rightarrow \neg B$

**Kérdés.** $\underbrace{\{1,2\}}_{\Sigma} \models \underbrace{3}_{\phi}$?

| n | E | B | P | $\neg E \Rightarrow B$ | $P \vee \neg E$ | $P \Rightarrow \neg B$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | i | i | i | i | i | h |
| 2 | i | i | h | i | h | i |
| 3 | i | h | i | i | i | i |
| 4 | i | h | h | i | h | i |
| 5 | h | i | i | i | i | h |
| 6 | h | i | h | i | i | i |
| 7 | h | h | i | h | i | i |
| 8 | h | h | h | h | i | i |

$\Sigma$ a táblázat 1, 3, 5 és 6. sorában igaz.

A táblázat első sora mutatja, hogy $\Sigma \not\models \phi$, mert Zita bár puskázik, de mégis megbukik.

Ha $n$ db feltétel változó van, akkor $2^n$ db esetet kell ellenőrizni.

## 1.2. Elsőrendű logikában

**Definíció.** Legyen $\Sigma$ formulahalmaz, $\phi$ formula, $\mathcal{A}$ struktúra.

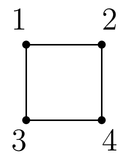
- $\underbrace{\mathcal{A} \models \Sigma}_{\Sigma \text{ igaz } \mathcal{A}\text{-ban}}$, ha minden $\rho \in \Sigma$-ra $\mathcal{A} \models \rho$.
- $\underbrace{\Sigma \models \phi}_{\Sigma\text{-nak következménye } \phi}$, ha minden $\mathcal{A}$ struktúrában $\mathcal{A} \models \Sigma$ esetén $\mathcal{A} \models \phi$.

**Példa.**

- $\Sigma = \{\forall x \exists y R(x, y)\}$,
- $\phi = \exists y \forall x R(x, y)$.

**Kérdés.** $\Sigma \models \phi$?

Legyen $A = \{1, 2, 3, 4\}$ alaphalmaz, $R(x, y)$: az ábra szerint él megy $x$-ből $y$-ba, $\mathcal{G} = \langle A, R, = \rangle$ struktúra.




- $\mathcal{G} \models \Sigma$, mert minden csúcsnak van szomszédja.
- $\mathcal{G} \not\models \phi$, mert nincs olyan csúcs, amely minden csúccsal össze lenne kötve.

Tehát: $\Sigma \not\models \phi$.

# 2. Bizonyításelmélet

## 2.1. Halálcsillag

Legyen az $L$ nyelvben 1 db 2 változós reláció szimbólum, és legyen $n$ egy véges szám. Hány $n$ elemű modellje van $L$-nek? Annyi, ahány részhalmaza van egy $n$ elemű halmaz direkt-négyzetének. $\to 2^{n^2}$ db van.

Például $n = 20$-ra: $2^{n^2} = 2^{400} = (2^4)^{100} = 16^{100} > 10^{100}$.

Ezeket géppel próbáljuk megvizsgálni. Legyen egy lépés 1 db struktúra megvizsgálása, amely legalább annyi idő, amíg fénysebességgel átmegyünk egy elektron átmérőjén. Az elektron átmérője $> 10^{-15}$m. A fénysebességet ($< 3 \cdot 10^8 \frac{\text{m}}{\text{s}}$) nagyvonalúan felülről becsüljük $10^9 \frac{\text{m}}{\text{s}}$-el. Tehát másodpercenként legfeljebb $10^{24}$ eset vizsgálható meg.

Egy gép tömege legalább annyi, mint egy elektron tömege ($9.1 \cdot 10^{-31}$kg $\geq 10^{-31}$kg). Vegyünk annyi ilyen gépet, amennyi a Föld tömege ($5.974 \cdot 10^{24}$kg $\leq 10^{25}$kg). Egy ilyen halálcsillaggal másodpercenként maximum $10^{24} \cdot 10^{56} = 10^{80}$ eset vizsgálható meg. Egy nap kevesebb, mint $86\,400 \leq 10^5$ másodperc, és egy évben $365 \leq 10^3$ nap van. Tehát a halálcsillaggal évente $10^{88}$ eset vizsgálható át. Az Univerzum kora $1.3 \cdot 10^9 \leq 10^{10}$ év. Tehát a 20 elemű struktúrák átnézése halálcsillaggal legalább 100-szorosa az univerzum korának.

Mi van a 21 elemű struktúrákkal? A végtelen alaphalmazú struktúrák *elvileg* sem nézhetők így át. Tehát $\Sigma \models \phi$ eldöntéséhez mást kell csinálni.

## 2.2. Bizonyításelmélet (ítéletkalkulusban)

**Definíció.** Axióma sémák:

1. $\alpha \Rightarrow \beta \Rightarrow \alpha$,
2. $(\alpha \Rightarrow \beta \Rightarrow \gamma) \Rightarrow (\alpha \Rightarrow \beta) \Rightarrow (\alpha \Rightarrow \gamma)$,
3. $(\neg\alpha \Rightarrow \beta) \Rightarrow (\neg\alpha \Rightarrow \neg\beta) \Rightarrow \alpha$.

$\alpha$, $\beta$, $\gamma$ forumla változók.

Axiómák: $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ helyére tetszőleges formulákat írhatunk.

**Definíció.** Modus Ponens: $\dfrac{\alpha \Rightarrow \beta,\ \alpha}{\beta}$

**Definíció.** Legyen $\Sigma$ formulahalmaz, $\phi$ formula.

$\underbrace{\Sigma \vdash \phi}_{\Sigma\text{-ból } \phi \text{ levezethető}}$ ha van olyan véges $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ formulasorozat, hogy $\alpha_n = \phi$ és mindent $i \leq n$-re:

- $\alpha_i$ axióma, vagy
- $\alpha_i \in \Sigma$, vagy
- $\alpha_i$ Modus Ponens-el megkapható korábbi $\alpha_j$-kből.

**Megjegyzések.**

1. $\Sigma \vdash \phi$ definíciójában nincs szó a jelentésről.
2. Adott $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$-ről algoritmikusan eldönthető, hogy $\phi$-t vezeti-e le $\Sigma$-ból.

**Példa.** Tetszőleges $\phi$ formulára $\emptyset \vdash \phi \Rightarrow \phi$.

1. $\left(\underbrace{\phi}_{\alpha} \Rightarrow \underbrace{(\phi \Rightarrow \phi)}_{\beta} \Rightarrow \underbrace{\phi}_{\gamma}\right) \Rightarrow \left(\underbrace{\phi}_{\alpha} \Rightarrow \underbrace{(\phi \Rightarrow \phi)}_{\beta}\right) \Rightarrow \left(\underbrace{\phi}_{\alpha} \Rightarrow \underbrace{\phi}_{\gamma}\right)$
   2. axióma
2. $\underbrace{\phi}_{\alpha} \Rightarrow \underbrace{(\phi \Rightarrow \phi)}_{\beta} \Rightarrow \underbrace{\phi}_{\alpha}$
   1. axióma
3. $(\phi \Rightarrow (\phi \Rightarrow \phi)) \Rightarrow (\phi_\alpha \Rightarrow \phi_\gamma)$
   MP 1 és 2-n
4. $\underbrace{\phi}_{\alpha} \Rightarrow \left(\underbrace{\phi}_{\beta} \Rightarrow \underbrace{\phi}_{\alpha}\right)$
   1. axióma
5. $\phi \Rightarrow \phi$
   MP(3,4)

**Cél:** *Teljességi tétel*: Legyen $\Sigma$ formulahalmaz, $\phi$ formula. $\Sigma \models \phi$ pontosan akkor, ha $\Sigma \vdash \phi$.

(Azaz egy következtetés pontosan akkor helyes, ha formálisan be lehet bizonyítani.)

**Definíció.** Legyen $\Sigma$ formulahalmaz, $\mathrm{Ded}(\Sigma) = \{\phi : \Sigma \vdash \phi\}$.

**Állítás.**

1. $\Sigma \subseteq \mathrm{Ded}(\Sigma)$,
2. Ha $\Gamma \subseteq \Sigma$ akkor $\mathrm{Ded}(\Gamma) \subseteq \mathrm{Ded}(\Sigma)$ (monotonitás),
3. $\mathrm{Ded}(\mathrm{Ded}(\Sigma)) = \mathrm{Ded}(\Sigma)$ (ideompotencia).

*Bizonyítás.*

1. Triviális. Ha $\phi \in \Sigma$, akkor $\phi$ egy 1-lépéses levezetése $\phi$-nek $\Sigma$-ból. Így $\phi \in \mathrm{Ded}(\Sigma)$.
2. Legyen $\phi \in \mathrm{Ded}(\Gamma)$, tehát van $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ ($\alpha_n = \phi$) úgy, hogy ($\forall i \leq n$):
   (a) $\alpha_i$ axióma, vagy
   (b) $\alpha_i \in \Gamma$, vagy
   (c) $\alpha_i$ MP-vel jön korábbi $\alpha_j$-kből.

$\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ mutatja, hogy $\Sigma \vdash \phi$ azaz $\phi \in \mathrm{Ded}(\Sigma)$.

3. (1) miatt $\Sigma \subseteq \mathrm{Ded}(\Sigma)$, (2) miatt $\mathrm{Ded}(\Sigma) \subseteq \mathrm{Ded}(\mathrm{Ded}(\Sigma))$. Elég: $\mathrm{Ded}(\mathrm{Ded}(\Sigma)) \subseteq \mathrm{Ded}(\Sigma)$

   Legyen $\phi \in \mathrm{Ded}(\mathrm{Ded}(\Sigma))$. Ekkor van $\alpha_1, \ldots \alpha_n$ ($\alpha_n = \phi$), hogy $\forall i \leq n$-re:

   (a) $\alpha_i$ axióma, vagy

   (b) $\alpha_i \in \mathrm{Ded}(\Sigma)$, vagy

   (c) $\alpha_i$ MP-vel jön korábbi $\alpha_j$-kből.

   Kell: $\phi \in \mathrm{Ded}(\Sigma)$.

   Ha $\alpha_i \in \mathrm{Ded}(\Sigma)$, akkor $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$-ben $\alpha_i$-t cseréljük ki egy $\Sigma$-beli levezetésre. Amit így kapunk mutatja, hogy $\Sigma \vdash \phi$.

□

**Tétel.** (Dedukciós tétel) Legyen $\Sigma$ formulha halmaz, $\phi$, $\psi$ formula. Ekkor a következők ekvivalensek:

1. $\Sigma \vdash \phi \Rightarrow \psi$,
2. $\Sigma \cup \{\phi\} \vdash \psi$;

(Implikáció levezethető, ha $\Sigma \cup \{\phi\} \vdash \psi$.)

*Bizonyítás.*

- (1) $\Rightarrow$ (2): (1) és előző állítás (2) (monotonitás) miatt
  1. $\Sigma \cup \{\phi\} \vdash \phi \Rightarrow \psi$
  2. $\Sigma \cup \{\phi\} \vdash \phi$
  3. MP(1,2): $\Sigma \cup \{\phi\} \vdash \psi$.
- (2) $\Rightarrow$ (1): legközelebb.

□