Matematikai logika – 2. előadás

Begépelte: Csikós Donát

2010. november 11.

1. Szemantika

1.1. Szemantika az ítéletkalkulusban

Definíció A $k : \{\text{változók}\} \to \{i, h\}$ függvényeket *kiértékelések*nek nevezzük. A kiértékelés tehát minden egyes változóhoz igazságértéket rendel.

Logikai műveletek jelentése. Az egyes logikai műveletek jelentését az alábbi táblázat foglalja össze.

$\mathbf{x}$	$\mathbf{y}$	$\neg\mathbf{x}$	$\mathbf{x} \wedge \mathbf{y}$	$\mathbf{x} \vee \mathbf{y}$	$\mathbf{x} \Rightarrow \mathbf{y}$	$\mathbf{x} \Leftrightarrow \mathbf{y}$
i	i	h	i	i	i	i
i	h	h	h	i	h	h
h	i	i	h	i	i	h
h	h	i	h	h	i	i

A $\Rightarrow$ csak úgy lehet hamis, ha előtagja igaz és utótagja hamis. Ebből adódik, hogy hamis előtagból bármi következik.

Definíció Legyen k kiértékelés, φ, ψ, θ formula. $k \vDash \varphi$, azaz k-ban φ *igaz*, ha:

1. $k(\varphi) = i$, és φ ítéletváltozó.
2. $k \vDash \psi$ és $k \vDash \theta$ és $\varphi = \psi \wedge \theta$.
3. $k \vDash \psi$ vagy $k \vDash \theta$ és $\varphi = \psi \vee \theta$.
4. $k \nvDash \psi$ vagy $k \vDash \theta$ és $\varphi = \psi \Rightarrow \theta$.
5. $k \vDash \psi$ és $k \vDash \theta$ egyszerre teljesül, és $\varphi = \psi \Leftrightarrow \theta$.
6. $k \nvDash \psi$ esetén: $\varphi = \neg\psi$.

A definíció szerint tehát egy összetett formula jelentése a részformulái jelentése és a fenti táblázat alapján számítható ki.

Megjegyzés A formulák igazságértéke csak a bennük szereplő változók igazságától függ.

Definíció Legyen φ, ψ formula. $\varphi \equiv \psi$, azaz φ és ψ *ekvivalensek*, ha ha minden k kiértékelésre $k \vDash \varphi$ és $k \vDash \psi$ egyszerre áll fenn.

Példa

$\mathbf{A}$	$\mathbf{B}$	$\mathbf{C}$	$\mathbf{A} \Rightarrow (\mathbf{B} \Rightarrow \mathbf{C})$	$(\mathbf{A} \Rightarrow \mathbf{B}) \Rightarrow \mathbf{C}$
i	i	i	i	i
i	i	h	h	h
i	h	i	i	i
i	h	h	i	i
h	i	i	i	i
h	i	h	i	h
h	h	i	i	i
h	h	h	i	h

A 6. és a 8. sor közti eltérés mutatja, hogy a két kifejezés nem ekvivalens egymással:
$A \Rightarrow (B \Rightarrow C) \not\equiv (A \Rightarrow B) \Rightarrow C$.

Konvenció

(1) $A \Rightarrow B \Rightarrow C$ konvenció szerint $A \Rightarrow (B \Rightarrow C)$-t jelent.

(2) A műveletek szokásos sorrendje csökkenő precedencia szerint: $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\Rightarrow$, $\Leftrightarrow$.

1.2. Szemantika elsőrendű logikában

Definíció t egy *típus*, ha $t = (I, J, K, \rho, \delta)$, ahol I, J, K páronként diszjunkt halmaz, $\rho : I \to N$, $\delta : J \to N$ függvény.
Legyen L egy elsőrendű nyelv. Ennek $t = (I, J, K, \rho, \delta)$ a típusa, ha L-ben:

I**:** a relációszimbólumok halmaza, és ha $R \in I$, akkor R $\rho(R)$ változós,

J**:** a függvényszimbólumok halmaza, és ha $f \in J$, akkor f $\delta(f)$ változós,

K**:** a konstansszimbólumok halmaza.

A típus tehát az elsőrendű nyelv változtatható részét adja meg.

Definíció Legyen $t = (I, J, K, \rho, \delta)$ típus. $\mathcal{A} = \langle A, R_i, f_j, C_k \rangle_{i \in I, j \in J, k \in K}$ egy t típusú *struktúra*, ha A egy nemüres (alap)halmaz, és minden $i \in I$, $j \in J$, $k \in K$-ra $R_i \subseteq A^{\rho(i)}$ egy $\rho(i)$ változós reláció, $f_j : A^{\delta(j)} \to A$ egy $\delta(j)$ változós függvény, $C_k \in A$ konstans.

Példa

(1) Minden gráf egy struktúra. $G = \langle V, E, = \rangle$, a V csúcshalmaz az alaphalmaz, az E élhalmaz egy kétváltozós reláció. I egyelemű, J, K üresek.

(2) Minden csoport egyben egy struktúra is.

(3) $A = \{$csapatok, játékosok$\}$. $R(x, y)$: x erősebb, mint y. Fradi: konstans. $J(x)$: játékos. $C(x)$: csapat. Ekkor $\mathcal{A} = \langle A, J, C, R, =, Fradi \rangle$. J üres.

Definíció Az $\mathcal{A}$ struktúra *modellje a nyelvnek*, ha $\mathcal{A}$ és L típusa azonos (L formuláit mindig L típusú struktúrákban nézzük).

Definíció k elsőrendű $\mathcal{A}$ feletti kiértékelés, ha $k : \{\text{változók}\} \to A$.

Definíció Legyen $\mathcal{A}$ struktúra, t term, k egy $\mathcal{A}$ feletti kiértékelés. Ekkor t értéke $\mathcal{A}$-ban k mellett:

$$t^{\mathcal{A}}[k] = \begin{cases} c & \text{, ha } t = c \text{ konstans szimbólum,} \\ k(x) & \text{, ha } t = x \text{ változó,} \\ f(t_1^{\mathcal{A}}[k], t_2^{\mathcal{A}}[k], \ldots, t_n^{\mathcal{A}}[k]) & \text{, ha } t = f(t_1, t_2, \ldots, t_n). \end{cases}$$

Definíció Legyen k, k' kiértékelés, x változó. $k \overset{\text{x}}{\equiv} k'$, azaz k x *közel van* k'-höz, ha $x \neq y \Rightarrow k(y) = k'(y)$ (azaz x-től eltérő változóknak ugyanaz a képe).

Definíció Legyen φ formula, $\mathcal{A}$ struktúra, k kiértékelés. $\mathcal{A} \vDash \varphi[k]$ (azaz $\mathcal{A}$-ban *igaz* φ a k mellett), ha

(1) $(t_1^{\mathcal{A}}[k], t_2^{\mathcal{A}}[k], \ldots, t_n^{\mathcal{A}}[k]) \in R^{\mathcal{A}}$, ha $\varphi = R(t_1, t_2, \ldots, t_n)$ atomi formula,

(2) $t_1^{\mathcal{A}}[k] = t_2^{\mathcal{A}}[k]$, ha $\varphi = t_1^n = t_2^n$,

(3) $\mathcal{A} \nvDash \psi[k]$, ha $\varphi = \neg\psi$,

(4) $\mathcal{A} \vDash \psi[k]$ és $\mathcal{A} \vDash \delta[k]$, ha $\varphi = \psi \wedge \delta$ (ez ugyanúgy az ítéletkalkulus többi $\vee$,$\Rightarrow$, $\Leftrightarrow$ műveletére is kell),

(5) létezik olyan $k' \overset{\text{x}}{\equiv} k$, hogy ha $\varphi = \exists x\psi$, akkor $\mathcal{A} \vDash \psi[k']$,

(6) minden $k' \overset{\text{x}}{\equiv} k$, teljesül hogy ha $\varphi = \forall x\psi$, akkor $\mathcal{A} \vDash \psi[k']$.

Definíció $\mathcal{A} \vDash \varphi$ (azaz φ *kiértékelés nélkül igaz* $\mathcal{A}$-ban), ha minden k-ra $\mathcal{A} \vDash \varphi[k]$.

Példa $G = \langle V, E \rangle$, $V = \{1, 2, 3\}$, $E = \{(1, 2)\}$. Legyen $\varphi = \exists y E(x, y)$. $k = \left| \frac{x}{1} \right|$, $l = \left| \frac{x}{2} \right|$ Kérdés: $G \overset{?}{\vDash} \psi$. Ez nem igaz, mivel $G \nvDash \varphi[k]$, de $G \vDash \varphi[l]$.

Példa A gyűrűk esetén: $\exists x(x^2 = -1)$? Ez a valós számok körében $\langle \mathbb{R}, +, \cdot, = \rangle \nvDash \varphi$, de komplex számok esetén $\langle \mathbb{C}, +, \cdot, = \rangle \vDash \varphi$.

Ebből is látszik, hogy egy formula más-más struktúrában lehet igaz, és lehet hamis is. Emellett nincs előre kitüntetve, hogy az adott formulát milyen struktúra felett kell vizsgálni.