Matematikai logika

2010/2011 ősz

1.előadás

1., Ha pő és mindegegy, akkor vildagur.
2., A bégahur pő és mindegegy.
3., Tehát a bégahur vildagur.
/ Karinthy után szabadon/

Ez a következtetés helyes, noha nem tudjuk, mit jelentenek a fenti állítások.

Mi számít állításnak?

- 0. rendű nyelvek (ítéletkalkulus)
- 1. rendű nyelvek

<u>0. rendű nyelvek</u>

- ítéletváltozók: X_0, X_1, X_2, …
- logikai összekötő jelek: ¬, ∧, ∨, ⇒, ⟺
- tagoló jelek: (,) (a zárójelek)

<u>Definíció</u>: *0-rendű formula* (~formularizált állítás)

(1) ha φ ítéletváltozó, akkor φ formula,
(2) ha φ, ψ formulák, akkor ¬φ, φ∧ψ, φ∨ψ, φ⟹ψ, φ⟺ψ is formula (sőt, (φ) is formula),
(3) Minden formula az előző két szabály véges sok alkalmazásával áll elő.

<u>Példák:</u> formula-e?

1. X *igen*
2. X¬⇒Y *nem*
3. ¬(X⇒Y) *igen*
4. ¬¬¬X *igen*
5. ∧XY⟹∨∨¬ *nem*

<u>Példák formalizálásra</u>

Amelyik állat csíkos (C), az nem pettyes (P).
(C⟹¬P)
Ha Zita nem puskázik (P), akkor megbukik (M).
(¬P⇒M)

<u>1. Rendű nyelvek</u>

(1) nem változtatható komponensek:
- individum változók: X_0, X_1, $X_{2,...}$
- logikai összekötő jelek: ¬, ∧, ∨, ⟹, ⟺, ∀, ∃ , =
- tagoló jelek: (,) , (zárójelek és vessző)

(2) változtatható komponensek:
- függvényszimbólumok,
- konstansszimbólumok (= 0-változós függvényszimbólumok),

- relációszimbólumok.

<u>Definíció</u>.: *TERM (elem különírás)*

(1) ha t változó, vagy konstansszimbólum, akkor term;
(2) ha f n-változós függvényszimbólum, $t_1, \ldots, t_n$ term, akkor $f(t_1, \ldots, t_n)$ is term;
(3) Minden term az előző két szabály véges sok alkalmazásával áll elő.

<u>Definíció</u>. *Elsrőendű formula:*

(1) ha $t_1, \ldots, t_n$ term, R *n* változós reláció szimbólum, akkor $R(t_1, \ldots, t_n)$ és $t_1=t_2$ is formulák (atomi formulák);
(2) ha φ,ψ formula, x változó, akkor $\neg\varphi$, $\varphi\wedge\psi$, $\varphi\vee\psi$, $\varphi\Longrightarrow\psi$, $\varphi\Longleftrightarrow\psi$, $\exists x\varphi$, $\forall x\varphi$, $[(\varphi)]$ is formulák ;
(3) Minden formula az előző két szabály véges sok alkalmazásával áll elő.

<u>Példák:</u>

1) Legyen
f egyváltozós függvény szimbólum,
g kétváltozós függvény szimbólum,
Q egyváltozós relációszimbólum.

Term-e?

1.	Q	*nem*
2.	f(g(X,Y))	*igen*
3.	g(f(X,Y))	*nem*
4.	$X\Longrightarrow Y$	*nem*

Formula-e?

1.	X	nem
2.	$X\Longrightarrow Y$	nem
3.	$\forall X\exists Y(Q(f(X))\Longrightarrow Q(Y)$	igen
4.	$\forall X\exists X Q(X)$	igen
5.	$\forall XY\ (X=Y)$	nem
6.	Q(f(X))	igen
7.	f(Q(X))	nem
8.	$\exists X\ (X=f(X))$	igen
9.	$\exists\ f(X=f(X))$	nem (2. rendű)

Formalizáljuk:

Röplabda:

J(X):	X játékos,
C(X):	X csapat,
T(X,Y):	X játékos tagja az Y csapatnak,
E(X,Y):	X erősebb, mint Y,
Fradi:	konstans szimbólum.

1. Van olyan játékos, aki nem a Fradiban játszik:
   $\exists X(J(X)\wedge\neg T(X,Fradi))$.
2. Minden játékos tagja valamelyik csapatnak:
   $\forall X\exists Y(J(X)\Longrightarrow C(Y)\wedge T(X,Y))$.

3. Mit jelent: $\exists X \forall Y(J(X) \Longrightarrow (C(Y) \wedge T(X,Y))$

Van olyan X objektum, hogy ha ez az objektum játékos, akkor az összes objektum csapat és X mindnek tagja.

4. Pontosan 1 csapat erősebb, mint a Fradi:

$$\exists X(C(X) \wedge E(X,Fradi)) \wedge$$
$$\neg(\exists X_1 \exists X_2(\neg(X_1 = X_2) \wedge C(X_1) \wedge C(X_2) \wedge E(X_1,Fradi) \wedge E(X_2,Fradi)).$$

5. Minden csapatnál van erősebb:

$$\forall X(C(X) \Longrightarrow \exists Y(C(Y) \wedge E(Y,X)).$$